Université d'Ottawa

Departement de Mathématiques et de Statistique

MAT 3543: Examen mi-session (26 Fév. 2008)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ______________________________

Prénom: ____________________________

No. d'étudiant : ______________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger votre solutions. Écrivez lisiblement.

Quest.	1	2	3	4	Total
max.	13	11	14	13	51
score					

1. (a) (2 points) Donner la définition d'un idéal premier P dans un anneau commutatif R.

(b) (6 points) Soit P un idéal dans un anneau commutatif R. Prouver: P est un idéal premier si et seulement si R/P est an anneau intègre.

(c) (3 points) Soit P un idéal premier dans R et soit $a \in R$ un élément nilpotent. Montrer $a \in P$.

(d) (2 points) Énoncer (sans preuve) tous les idéaux premiers dans $\mathbb{Z}$.

2. Soient A et B deux idéaux dans un anneau R tels que $A \subset B$. Montrer:

(a) (3 points) L'application $\theta : R/A \to R/B$, $r + A \mapsto r + B$, est bien définie.

(b) (4 points) L'application θ est un épimorphisme d'anneaux.

(c) (2 points) Le noyau de θ est B/A.

(d) (2 points) $R/A \Big/ B/A \cong R/B$.

3. (a) (2 points) Soit F un corps. Donner la définition d'un polynôme irréductible dans $F[x]$.

(b) (2 points) Énoncer le test d'irréductibilité modulaire.

(c) (4 points) Montrer que $2x^3 - x^2 + 3x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

(d) (6 points) Construire un corps K d'ordre 4 et donner la table de multiplication de K.

4. (a) (10 points) Soit F un corps, $0 \neq I$ un idéal dans $F[x]$. Prouver qu'il y a un polynôme h unitaire et un seul tel que $I = \langle h \rangle$.

(b) (3 points) Soit $I = \{f \in F[x] : f(0) = 0\}$ (cet un idéal de $F[x]$). Trouver un polynôme unitaire h tel que $I = \langle h \rangle$.