uOttawa

Department of Mathematics
and Statistics

Département de mathématiques
et statistique

Analyse III— Mat 3520

Examen de mi-session — 22 octobre 2009

Professeur : Vladimir Pestov

Durée : 1 h 20 m.
Prenez soin de bien rédiger vos solutions.
Les questions seront corrigées sur 30 notes.
La question bonus vaut 3 notes de plus.
Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre.

(1) (a) Donner les définitions d'une métrique et d'un espace métrique. **[2 notes]**

(b) Soient X, Y deux espaces métriques. Montrer que l'expression

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

définie une métrique sur le produit cartesien $X \times Y$. **[3 notes]**

(c) Soit X un espace métrique quelconque. Montrer que la diagonale de X,

$$\Delta_X = \{(x, x) \colon x \in X\} \subseteq X \times X,$$

est un sous-ensemble fermé du produit cartesien $X \times X$ muni de la distance comme dans le problème (1b). **[2 notes]**

(d) Soit X un espace métrique. Rappellons que le *diamètre* de X est défini par

$$\mathrm{diam}\,(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y).$$

Montrer que le diamètre de toute sphère de rayon $r > 0$,

$$S_r(x) = \{y \in X \colon d(x, y) = r\},$$

est plus petit ou égal à $2r$. Expliquer. **[2 notes]**

(e) En supposant que la sphère $S_r(x)$ n'est pas vide, est-ce que l'on a toujours $\mathrm{diam}\,(S_r(x)) = 2r$? Expliquer. **[2 notes]**

(f) Soit X un espace métrique avec des plusieurs points (au moins deux). Alors l'ensemble $Y = (X \times X) \setminus \Delta_X$ n'est pas vide, donc un sous-espace métrique du carré cartesien $X \times X$ muni de la distance comme dans le problème (1b). Exprimer le diamètre de Y à travers de $\mathrm{diam}\, X$. **[4 notes]**

[À continuer à la page suivante....]

(2) Rappellons que le symbole $\ell^\infty(\Gamma)$ note la famille de toutes les fonctions bornées $x\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto x_\gamma$, munie de la distance d_∞ du type ℓ^∞ (la disitance uniforme) donnée par

$$d_\infty(x,y) = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma - y_\gamma|.$$

(a) Donner la définition d'un espace métrique connexe. **[1 note]**

(b) Montrer qu'un espace métrique X n'est pas connexe si et seulement si il existe une fonction f continue sur X qui prend exactement deux valeurs distinctes. **[2 notes]**

(c) Notons $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ le sous-espace métrique de ℓ^∞ qui consiste des toutes les suites bornées des nombres rationnels. Montrer que l'espace métrique $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ n'est pas connexe. **[3 notes]**

(d) Montrer que, quels que soient $x \in \ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, la sphère $S_r(x)$ du rayon r centrée au x n'est pas vide. **[3 notes]**

(e) Pour $\Gamma = \{1,2\}$, l'espace $\ell^\infty(\Gamma) = \ell^\infty(2)$ s'identifie avec le plan $\mathbb{R}^2$, et la distance devient

$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dessiner la boule fermée du rayon 1 centrée au point $(0,0)$ dans l'espace $\ell^\infty(2)$. **[2 notes]**

(f) Donner la définition d'un plongement isométrique d'un espace métrique X dans un espace métrique Y. **[1 note]**

(g) Construire deux plongements isométriques i, j de l'intervalle $[0,1]$ muni de la distance usuelle dans $\ell^\infty(2)$ de façon que $i(0) = j(0)$, $i(1) = j(1)$, et au même temps pour tous $t \in (0,1)$, $i(t) \neq j(t)$. **[3 notes]**

(3) (*bonus* $*$) Soit X un espace métrique du diamètre ≤ 2 :

$$D = \mathrm{diam}\,(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y) \leq 2.$$

Montrer que X se plonge isométriquement dans la sphère unitaire $S_1(0)$ de l'espace $\ell^\infty(|X|)$, où $|X|$ note l'ensemble sous-jacent de l'espace X. **[3 notes]**

[Fin des questions]