Analyse III – Mat 3520

Solutionnaire à l'examen de mi-session 1

(le jeudi 22 octobre 2009)

Jugeant sur le fait que je ne suis pas parvenu moi-même à rédiger les solutions pendant l'examen partiel de mi-session, le nombre des problèmes dans ma séléction était sans doute excessif. Les chiffres — généralement un peu déprimés — affirment l'exactitude de cette observation.

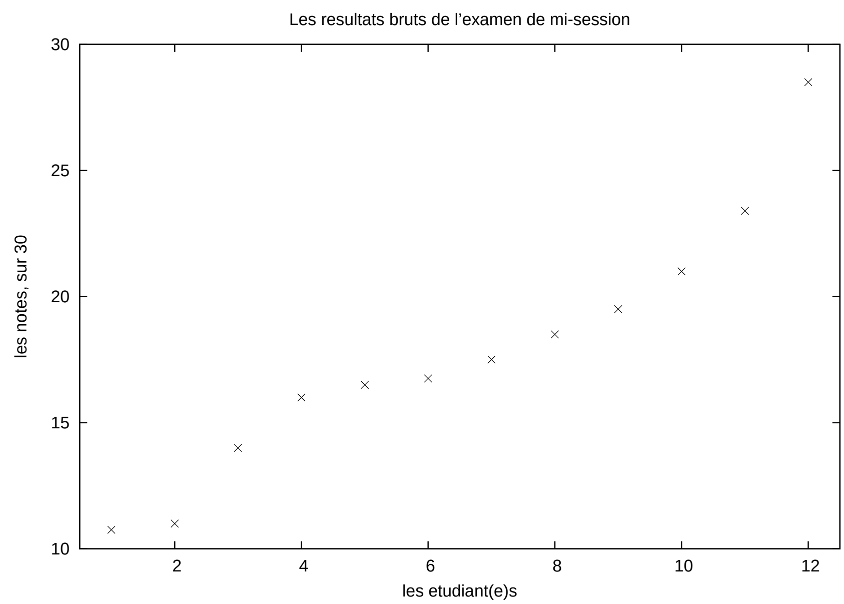

FIG. 1. L'examen de mi-session. Les notes : médiane 17.125, moyenne 17.783.

Pour cette raison, la note de votre examen partiel sera calculée sur 25.

$$* * *$$

(1a) Donner les définitions d'une métrique et d'un espace métrique. **[2 notes]**

◁ Voir déf. 1.2 et déf. 1.4 dans les notes du cours. ▷

(1b) Soient X, Y deux espaces métriques. Montrer que l'expression

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

définie une métrique sur le produit cartesien $X \times Y$. **[3 notes]**

$\triangleleft$ (Séparation) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \iff d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2) = 0 \iff d_X(x_1,x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1,y_2) = 0 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \iff (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

(Symétrie) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) = d_X(x_2,x_1) + d_Y(y_2,y_1) = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$.

(Inégalité triangulaire) $d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) = d_X(x_1,x_3) + d_Y(y_1,y_3) \leq d_X(x_1,x_2)+d_X(x_2,x_3)+d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3) = d((x_1,y_1),(x_2,y_2))+d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$.
$\triangleright$

(1c) Soit X un espace métrique quelconque. Montrer que la diagonale de X,

$$\Delta_X = \{(x,x) \colon x \in X\} \subseteq X \times X,$$

est un sous-ensemble fermé du produit cartesien $X \times X$ muni de la distance comme dans le problème (1b). **[2 notes]**

$\triangleleft$ *Première solution.* Nous allons montrer que le compleméntaire de la diagonale, $(X \times X) \setminus \Delta_X$, est ouvert. Soit $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ quelconque. Comme $x \neq y$, on a $d_X(x,y) > 0$. Posons $\epsilon = d(x,y) > 0$ et notons $B_\epsilon((x,y))$ la boule ouverte du rayon ϵ autour de (x,y) dans l'espace métrique $X \times X$.

Quel que soit $(z,w) \in B_\epsilon((x,y))$, on a

$$d_X(z,x) + d_X(w,y) = d_{X\times X}((z,w),(x,y)) < \epsilon = d(x,y).$$

Si l'on suppose que $d_X(z,w) = 0$, on obtient, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y) = d(x,z) + d(w,y),$$

qui n'est pas le cas. En conséquent,

$$d_X(z,w) > 0,$$

d'où on déduit que $z \neq w$ et $(z,w) \notin \Delta_X$. Cela deux dire que la boule ouverte $B_\epsilon((x,y))$ ne rencontre pas la diagonale :

$$B_\epsilon((x,y)) \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X,$$

et la preuve est accomplie. $\square$

Deuxième solution (JO ANN COLAS, JUSTIN MARTEL, MAUDE VERRET). Soit $(x,y) \in X \times X$ un point adhérent à la diagonale. Alors il existe une suite de points $(x_n,x_n) \in \Delta_X$, $n \in \mathbb{N}_+$, convergente vers (x,y). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que, quel que soit $n \geq N$, on a $d((x_n,x_n),(x,y)) < \epsilon$, c.à.d., $d(x_n,x) < \epsilon$ et $d(x_n,y) < \epsilon$. On en conclut : $d(x,y) < 2\epsilon$ et, à la limite $\epsilon \downarrow 0$, $x = y$. Cela veut dire que la limite $(x,y) = (x,x)$ appartient à la diagonale Δ_X, qui est donc fermée dans $X \times X$. $\triangleright$

(1d) Soit X un espace métrique. Rappellons que le *diamètre* de X est défini par

$$\mathrm{diam}\,(X) = \sup_{x,y \in X} d(x,y).$$

Montrer que le diamètre de toute sphère de rayon $r > 0$,

$$S_r(x) = \{y \in X \colon d(x,y) = r\},$$

est plus petit ou égal à $2r$. Expliquer. **[2 notes]**

◁ Quels que soient $y, z \in S_r(x)$, on a

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < 2r,$$

et par conséquent

$$\operatorname{diam}(S_r(x)) = \sup_{y,z\in S_r(x)} d(y,z) \leq 2r,$$

établissant le résultat. ▷

(1e) En supposant que la sphère $S_r(x)$ n'est pas vide, est-ce que l'on a toujours

$$\operatorname{diam}(S_r(x)) = 2r?$$

Expliquer. **[2 notes]**

◁ Non. Les contre-exemples sont nombreux. Le plus simple possible : le sous-espace métrique $X = \{0,1\}$ de $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, où $x = 0$ et $r = 1$. On a

$$\operatorname{diam} S_1(0) = \operatorname{diam}\{1\} = 0 \neq 2 = 2r.$$

▷

(1f) Soit X un espace métrique avec des plusieurs points (au moins deux). Alors l'ensemble $Y = (X \times X) \setminus \Delta_X$ n'est pas vide, donc un sous-espace métrique du carré cartesien $X \times X$ muni de la distance comme dans le problème (1b). Exprimer le diamètre de Y à travers de $\operatorname{diam} X$. **[4 notes]**

◁ Notons d'abord que le diamètre du carré $X \times X$ par rapport à la distance du problème (1b) (une *somme du type* ℓ^1) est deux fois le diamètre de X :

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(X \times X) &= \sup_{x,y,z,w\in X} (d_X(x,z) + d_X(y,w)) \\
&= 2 \sup_{x,y\in X} d_X(x,y) \\
&= 2 \operatorname{diam}(X).
\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit

$$\operatorname{diam}(Y) \leq \operatorname{diam}(X \times X) = 2 \operatorname{diam}(X).$$

D'autre part, quels que soient $x, y \in X$, $x \neq y$, on a $(x,y) \in Y$ et $(y,x) \in Y$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(Y) &\geq \sup_{x,y\in X,\, x\neq y} d_{X\times X}((x,y),(y,x)) \\
&= \sup_{x,y\in X} 2d_X(x,y) \\
&= 2 \operatorname{diam}(X).
\end{aligned}$$

Ensemble, les deux inégalités assurent que

$$\operatorname{diam}(Y) = 2 \operatorname{diam}(X).$$

$\triangleright$

(2a) Donner la définition d'un espace métrique connexe. **[1 note]**

$\triangleleft$ Définition 6.2 combinée avec l'une des propriétés formulées dans la proposition 6.1. $\triangleright$

(2b) Montrer qu'un espace métrique X n'est pas connexe si et seulement si il existe une fonction f continue sur X qui prend exactement deux valeurs distinctes. **[2 notes]**

$\triangleleft$ Si X n'est pas connexe, il existe un sous-ensemble propre, V, à la fois ouvert et fermé. Posons $f = \chi_V$, la fonction caractéristique de V. Elle est continue et prends deux valeurs, 0 et 1.

Par contre, s'il existe une application continue f de X dans un espace métrique quelconque Y dont le cardinal est deux, $Y = \{a, b\}$, alors les ensembles $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ sont ouvert, disjoints, non-vides, et ils recouvrent X. On en conclut : X est non convexe. $\triangleright$

(2c) Notons $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ le sous-espace métrique de ℓ^∞ qui consiste des toutes les suites bornées des nombres rationnels. Montrer que l'espace métrique $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ n'est pas connexe. **[3 notes]**

$\triangleleft$ Voir le problème 6 dans le (solutionnaire au) devoir 3 où une propriété plus forte de l'espace $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ avait été établie. $\triangleright$

(2d) Montrer que, quels que soient $x \in \ell^\infty_{\mathbb{Q}}$ et $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, la sphère $S_r(x)$ du rayon r centrée au x n'est pas vide. **[3 notes]**

$\triangleleft$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre rationnel $z_n \in (x_n + r - 1/n, x_n + r)$. La suite $z = (z_n)$ est évidemment bornée, donc un élément de $\ell^\infty_{\mathbb{Q}}$. Au même temps, quel que soit n, on a

$$r - \frac{1}{n} < |z_n - x_n| < r,$$

et par conséquent,

$$d_\infty(x, z) = \sup_n |z_n - x_n| = r.$$

$\triangleright$

(2e) Pour $\Gamma = \{1, 2\}$, l'espace $\ell^\infty(\Gamma) = \ell^\infty(2)$ s'identifie avec le plan $\mathbb{R}^2$, et la distance devient

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dessiner la boule fermée du rayon 1 centrée au point $(0, 0)$ dans l'espace $\ell^\infty(2)$. **[2 notes]**

$\triangleleft$ Un point $(x, y) \in \ell^\infty(2)$ appartient à la boule $B_1((0, 0))$ si et seulement si la valeur absolue de chacune des deux coordonnées x, y ne dépasse pas 1. Por conséquent, la boule correspondente est tout simplement un carré, voir la figure 2.

$\triangleright$

(2f) Donner la définition d'un plongement isométrique d'un espace métrique X dans un espace métrique Y. **[1 note]**

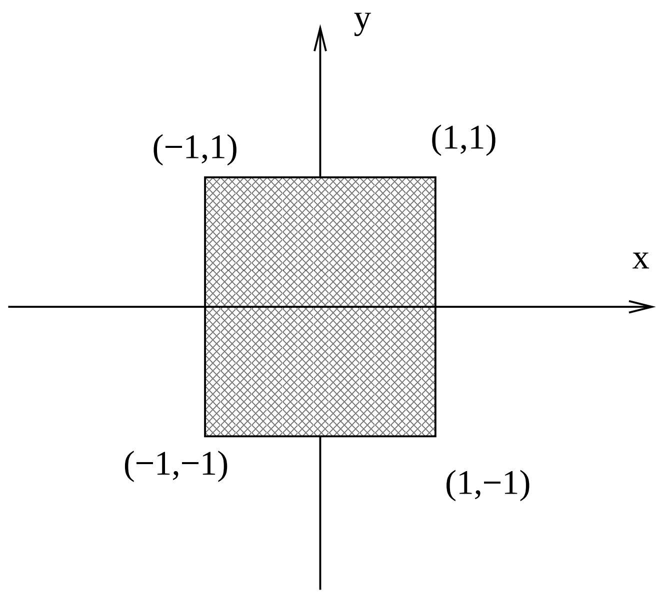

FIG. 2. Une boule fermée du rayon 1 dans l'espace $\ell^\infty(2)$.

◁ Définition 1.14 des notes du cours. ▷

(2g) Construire deux plongements isométriques i, j de l'intervalle $[0,1]$ muni de la distance usuelle dans $\ell^\infty(2)$ de façon que $i(0) = j(0)$, $i(1) = j(1)$, et au même temps pour tous $t \in (0,1)$, $i(t) \neq j(t)$. **[3 notes]**

◁ L'un des deux plongements à construire est bien évident :

$$\forall t \in [0,1], \ \ i(t) = (t, 0) \in \ell^\infty(2),$$

et il est facile à montrer que pour tous $t, s \in [0,1]$, on a

$$d_\infty(i(t), i(s)) = |t - s|.$$

Pour construire le second, choisissons d'abord une fonction réelle lipschitzienne du rapport 1, $f\colon [0,1] \to [0,1]$, avec les propriétés $f(0) = f(1) = 0$ et $f(t) > 0$ pour tous $t \in (0,1)$. Telles fonctions sont bien nombrieuses, par exemple :

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - t, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ou bien

$$f_2(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi},$$

ou enfin

$$f_3(t) = \frac{1}{2} x(1 - x),$$

et cetera. Une fois f est choisie, posons

$$\forall t \in [0,1] \;\; j(t) = (t, f(t)) \in \ell^\infty(2).$$

Quels que soient $t, s \in [0,1]$, on a, grâce à la propriété 1-lipschitzienne de f,

$$d_\infty(j(t), j(s)) = \max\{|t-s|, |f(t) - f(s)|\} = |t-s|.$$

Il est clair que $i(0) = j(0)$, $i(1) = j(1)$, et pour tous $t \in (0,1)$, $i(t) \neq j(t)$.

L'image de l'intervalle par le plongement j est le graphe de la fonction correspondente f, tandis que l'image de $[0,1]$ par i forme un segment de l'axe d'abscisses et correspond à la fonction $f(t) \equiv 0$. Voir la figure 3.

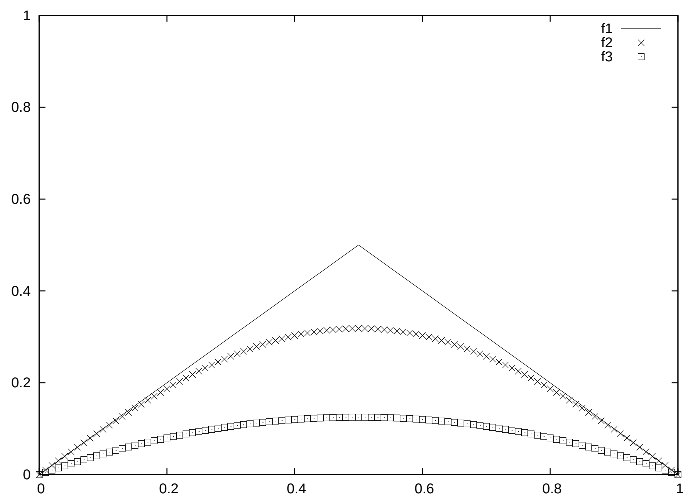

FIG. 3. Les graphes des fonctions f_i, $i = 1, 2, 3$.

Remarque : évidemment, seul le plongement i reste isométrique par rapport à la distance euclidienne ("usuelle") sur $\mathbb{R}^2$. ▹

(3) (*bonus* $*$) Soit X un espace métrique du diamètre ≤ 2 :

$$D = \operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x,y) \leq 2.$$

Montrer que X se plonge isométriquement dans la sphère unitaire $S_1(0)$ de l'espace $\ell^\infty(|X|)$, où $|X|$ note l'ensemble sous-jacent de l'espace X. **[3 notes]**

◃ Soit $x_0 \in X$ quelconque. Pour tous $x \in X$, définissons une fonction $i(x)\colon X \to \mathbb{R}$ (l'image de x par notre plongement isométrique i) comme suit :

$$i(x)(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x_0, \\ d(x,y) - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évidemment, toute fonction $i(x)$ prend ses valeurs dans l'intervalle fermé $[-1,1]$. De plus,

$$d_\infty(0,i(x)) = \sup_{y\in X} i(x)(y) = 1,$$

d'où on conclut que $i(x)\in S_1(0)$, la sphère du rayon un dans l'espace métrique $\ell^\infty(|X|)$.

Pour $x,y\in X$, on a $i(x)(x_0)=1=i(y)(x_0)$, et par conséquent

$$\begin{aligned} d_\infty(i(x),i(y)) &= \sup_{z\in X} |i(x)(z)-i(y)(z)| \\ &= \sup_{x\in X\setminus\{x_0\}} |d(x,z)-d(y,z)| \\ &\leq d(x,y). \end{aligned}$$

D'autre part, si $x,y\in X$, $x\neq y$, alors au moins l'un points entre eux n'est pas égal à x_0. Supposons, sans perte de la généralité, que $x\neq x_0$. On a

$$d_\infty(i(x),i(y)) \geq |i(x)(x)-i(y)(x)| = d(y,x),$$

d'où l'on conclut :

$$d_\infty(i(x),i(y)) = d(x,y).$$

$\triangleright$