MAT 3543 : Théorie des anneaux
Examen de mi-session : 16 octobre 2017
Prof : Monica Nevins

Vous avez 80 minutes pour cet examen. Il y a 5 questions et l'examen est sur 36 points.
Répondez à chaque question dans le cahier fourni. Vos réponses doivent être claires et bien justifiées **et inclure la définition des termes en caractères gras** pour obtenir le maximum de points.
Vous pouvez citer n'importe quel résultat qu'on a vu au cours ; mais si vous appuyez un théorème, n'oubliez pas de vérifier ses hypothèses explicitement.

You have 80 minutes for this exam. There are 5 questions and the exam is out of 36 points. Answer each question in the booklet provided. Your answers must be clear and well-justified, including **defining terms in bold** *to earn full points.*
You may use any result seen in the course ; but if you use a theorem don't forget to explicit verify that its hypotheses hold.

1. (2+2+2 = 6 points)

Définir chacun des concepts suivants, puis en donner un exemple :

(a) **le groupe d'unités d'un anneau** ;

(b) **un élément idempotent** ;

(c) **un diviseur de zéro (nonnul)**.

Define each of the following concepts and then give an example of each :

(a) the group of units of a ring ;

(b) an idempotent ;

(c) a nonzero zero-divisor.

2. ((1)+3+2+2+3 = 11 points)

Soient A et B des anneaux commutatifs. Soit $\varphi\colon A \to B$ un **homomorphisme d'anneaux** (pas nécessairement surjectif), et soit J un idéal de B. On pose $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$. Démontrer :

(a) $\varphi^{-1}(J) \lhd A$;

(b) $\varphi^{-1}(J)$ est **propre** si J l'est ;

(c) $\varphi^{-1}(J)$ est **premier** si J l'est.

Ensuite :

(d) Construire un exemple de φ et d'un idéal J **maximal** tel que $\varphi^{-1}(J)$ n'est pas maximal avec $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}$.

Let A and B be commutative rings and let $\varphi\colon A \to B$ be a **ring homomorphism** *(not necessarily surjective). Suppose that J is an ideal of B. We set $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$. Prove :*

(a) $\varphi^{-1}(J) \lhd A$;

(b) $\varphi^{-1}(J)$ is **proper** *if J is ;*

(c) $\varphi^{-1}(J)$ is **prime** *if J is.*

Then :

(d) Construct an example of φ and a **maximal** *ideal J such that $\varphi^{-1}(J)$ is not maximal, with $A = \mathbb{Z}$ and $B = \mathbb{R}$.*

3. (5 points)

Soit $\theta\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, tel que ni $\mathrm{im}(\theta)$ ni $\ker(\theta)$ possède un **élément nilpotent** nonnul. Démontrer que le seul élément nilpotent de A est 0.

Let $\theta\colon A \to B$ be a ring homomorphism. Suppose that neither $\mathrm{im}(\theta)$ nor $\ker(\theta)$ contains a nonzero **nilpotent element***. Prove that the only nilpotent element of A is 0.*

4. (2+3 = 5 points)

(a) Donner l'énoncé du théorème des restes chinois.

(b) Utiliser la méthode de la preuve du théorème des restes chinois pour trouver le plus petit entier $n > 0$ tel que son image dans $\mathbb{Z}_{18}$ est 3 et son image dans $\mathbb{Z}_{25}$ est 9.

(a) Give the statement of the Chinese Remainder Theorem.

(b) Use the method of the proof of the Chinese Remainder Theorem to find the least positive integer n whose image in $\mathbb{Z}_{18}$ is 3 and whose image in $\mathbb{Z}_{25}$ is 9.

5. (4+3+2 = 9 points)

Soient R et S des anneaux, et K un idéal de $R \times S$.

(a) Démontrer que K est un sous-ensemble de la forme $K = I \times J$.

On au aussi démontré sur le devoir que $I \lhd R$ et $J \lhd S$ dans ce cas ; acceptons ce fait.

(b) Classifier les idéaux maximals de $R \times S$.

(c) Donner un exemple d'anneaux R et S et d'un sous-anneau A de $R \times S$ tel que A n'est pas de la forme $B \times C$, où $B \subseteq R$ et $C \subseteq S$.

Let R and S be rings, and K an ideal of $R \times S$.

(a) Prove that K is a subset of the form $K = I \times J$.

We proved also in the homework that $I \lhd R$ and $J \lhd S$ in this case ; let's accept this as fact.

(b) Classify the maximal ideals of $R \times S$.

(c) Give an example of rings R and S and a subring A of $R \times S$ such that A is not of the form $B \times C$, with $B \subseteq R$ and $C \subseteq S$.