MAT 3543 : Théorie des anneaux
Examen de mi-session Solution: : 16 octobre 2017
Prof : Monica Nevins

1. (2+2+2 = 6 points)

Définir chacun des concepts suivants, puis en donner un exemple :

(a) **le groupe d'unités d'un anneau** ;

(b) **un élément idempotent** ;

(c) **un diviseur de zéro (nonnul)**.

Define each of the following concepts and then give an example of each :

(a) the group of units of a ring ;

(b) an idempotent ;

(c) a nonzero zero-divisor.

Solution: (a) $A^\times$ est l'ensemble des éléments $a \in A$ tel que $a^{-1} \in A$. $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$. (b) C'est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$. $e = 1$ est un exemple. (c) un élément $a \neq 0$ tel qu'il existe un $b \neq 0$ avec $ab = 0$; $a = 2$ en $\mathbb{Z}_6$ est un exemple.

2. ((1)+3+2+2+3 = 11 points)

Soit $\varphi\colon A \to B$ un **homomorphisme d'anneaux** (pas nécessairement surjectif), et soit J un idéal de B. On pose $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$. Démontrer :

(a) $\varphi^{-1}(J) \lhd A$;

(b) $\varphi^{-1}(J)$ est **propre** si J l'est ;

(c) $\varphi^{-1}(J)$ est **premier** si J l'est.

Ensuite :

(d) Construire un exemple de φ et d'un idéal J **maximal** tel que $\varphi^{-1}(J)$ n'est pas maximal avec $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}$.

Let $\varphi\colon A \to B$ be a **ring homomorphism** *(not necessarily surjective), and suppose that J is an ideal of B. We set $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$. Prove :*

(a) $\varphi^{-1}(J) \lhd A$;

(b) $\varphi^{-1}(J)$ is **proper** *if J is ;*

(c) $\varphi^{-1}(J)$ is **prime** *if J is.*

Then :

(d) Construct an example of φ and a **maximal** *ideal J such that $\varphi^{-1}(J)$ is not maximal, with $A = \mathbb{Z}$ and $B = \mathbb{R}$.*

Solution: (a) Puisque $\varphi\colon A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, on a que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tout $a, b \in A$. Soient $a, b \in \varphi^{-1}(J)$; alors puisque $\varphi(a), \varphi(b) \in J$, c'est vrai de leur somme et différence, or $a - b \in \varphi^{-1}(J)$. Si $a \in \varphi^{-1}(J)$ et $b \in A$, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \in J$ car $\varphi(a) \in J$ et $\varphi(b) \in B$. De même, $\varphi(ba) \in J$. Alors $ab, ba \in \varphi^{-1}(J)$, et $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A. (b) Si $1 \in \varphi^{-1}(J)$, alors $\varphi(1) \in J$, or $J = B$, et alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal propre si J l'est. (c) Finalement, si $ab \in \varphi^{-1}(J)$ et J est premier, alors $\varphi(a)\varphi(b) \in J$, et donc par la primalité de J, soit $a \in \varphi^{-1}(J)$ ou $b \in \varphi^{-1}(J)$, donc $\varphi^{-1}(J)$ est premier. (d) L'injection $\varphi(a) = a$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneaux, mais $J = \{0\}$ est un idéal maximal de $\mathbb{R}$ dont l'image inverse en $\mathbb{Z}$ est l'idéal $\{0\}$, qui n'est pas maximal car $\{0\} \subsetneq 2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$.

3. (5 points)

Soit $\theta\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, tel que ni $\mathrm{im}(\theta)$ ni $\ker(\theta)$ possède un **élément nilpotent** nonnul. Démontrer que le seul élément nilpotent de A est 0.

Let $\theta\colon A \to B$ be a ring homomorphism. Suppose that neither $\mathrm{im}(\theta)$ *nor* $\ker(\theta)$ *contains a nonzero* **nilpotent element**. *Prove that the only nilpotent element of A is* 0.

Solution: Soit $a \in A \setminus \{0\}$ nilpotent. Alors il existe un entier $n > 1$ tel que $a^n = 0$. Puisque θ est un homomorphisme, $\theta(a^n) = \theta(a)^n$ et $\theta(0) = 0$, d'où $\theta(a)^n = 0$. Puisque $\mathrm{im}(\theta)$ n'a pas de nilpotents nonnuls, il suit que $\theta(a) = 0$. Donc $a \in \ker(\theta)$. Mais par hypothèse celui-ci n'a pas de nilpotents nonnuls, contradiction.

4. (2+3 = 5 points)

(a) Donner l'énoncé du théorème des restes chinois.

(b) Utiliser la méthode de la preuve du théorème des restes chinois pour trouver le plus petit entier $n > 0$ tel que son image dans $\mathbb{Z}_{18}$ est 3 et son image dans $\mathbb{Z}_{25}$ est 9.

(a) Give the statement of the Chinese Remainder Theorem.

(b) Use the method of the proof of the Chinese Remainder Theorem to find the least positive integer n whose image in $\mathbb{Z}_{18}$ is 3 and whose image in $\mathbb{Z}_{25}$ is 9.

Solution: (a) TRC : Soit A un anneau et $I, J \lhd A$ tels que $I + J = A$. Alors $A/(I \cap J) \cong A/I \times A/J$.
(b) On pose $A = \mathbb{Z}$, $I = 18\mathbb{Z}$ et $J = 25\mathbb{Z}$. Alors puisque

$$126 = 18 * 7 = 5 * 25 + 1$$

on a que $18 \times 7 - 5 \times 25 = 1$, or $I + J = A$. Donc on peut appliquer le TRC, qui dit que l'homomorphisme $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{25}$ est surjectif. On pose

$$x = 126 \times 9 + (-125) \times 3 = 759.$$

Puisque $18\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z} = 450\mathbb{Z}$, par le TRC $759 \equiv 309$, et donc 309 est la seule valeur en $(0, 450)$ ayant la propriété qu'on désire.

5. (4+3+2 = 9 points)

Soient R et S des anneaux, et K un idéal de $R \times S$.

(a) Démontrer que K est un sous-ensemble de la forme $K = I \times J$.

On au aussi démontré sur le devoir que $I \lhd R$ et $J \lhd S$ dans ce cas ; acceptons ce fait.

(b) Classifier les idéaux maximals de $R \times S$.

(c) Donner un exemple d'anneaux R et S et d'un sous-anneau A de $R \times S$ tel que A n'est pas de la forme $B \times C$, où $B \subseteq R$ et $C \subseteq S$.

Let R and S be rings, and K an ideal of $R \times S$.

(a) Prove that K is a subset of the form $K = I \times J$.

We proved also in the homework that $I \lhd R$ and $J \lhd S$ in this case ; let's accept this as fact.

(b) Classify the maximal ideals of $R \times S$.

(c) Give an example of rings R and S and a subring A of $R \times S$ such that A is not of the form $B \times C$, with $B \subseteq R$ and $C \subseteq S$.

Solution: (du devoir)