MAT 3543 : Théorie des anneaux

Prof: Monica Nevins

Samedi, le 9 décembre, 2017 : Examen final

Faculté des sciences
Mathématiques et statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

613–562–5864
613–562–5776
www.uOttawa.ca

585 King Edward
Ottawa
ON K1N 6N5

Vous avez 3 heures pour cet examen. Il y a 7 questions. L'examen est sur 57 points et vaut 50% de votre note finale.

Répondez à chaque question dans le cahier fourni. Vos réponses doivent être claires et bien justifiées pour obtenir le maximum de points.

Vous pouvez citer n'importe quel résultat qu'on a vu au cours; mais si vous appuyez un théorème, n'oubliez pas de vérifier ses hypothèses explicitement. Vous avez le droit à une calculatrice. Les questions sont fournies dans les deux langues.

You have 3 hours for this exam. There are 7 questions. The exam is out of 57 points and is worth 50% of your final grade.

Answer each question in the booklet provided. Your answers must be clear and well-justified to earn full points.

You may use any result seen in the course; but if you use a theorem don't forget to explicit verify that its hypotheses hold. You are allowed to use a calculator. Questions are provided in both languages.

Question 1: (7 points)

Soit A un anneau arbitraire.

(a) Démontrer que $ev_a \colon A[x] \to A$ est un homomorphisme si $a \in Z(A)$.

(b) Si $A = \mathbb{H}$, les quaternions, démontrer que $i \notin Z(A)$ et que ev_i n'est pas un homomorphisme.

Let A be an arbitrary ring.

(a) Show that $ev_a \colon A[x] \to A$ is a homomorphism if $a \in Z(A)$.

(b) If $A = \mathbb{H}$, the quaternions, show that $i \notin Z(A)$ and that ev_i is not a homomorphism.

Question 2: (10 points)

(a) Définir les éléments premiers et irréductibles dans un anneau intégral.

(b) Démontrer que tout premier est irréductible.

(c) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est un anneau; démontrer que A est un anneau intégral.

(d) Démontrer que $2+\sqrt{-5}$ est irréductible et qu'il divise 9 en A.

(e) Est-ce que $2+\sqrt{-5}$ est premer? Justifiez votre réponse.

(a) Define irreducible and prime elements in an integral domain.

(b) Prove that each prime is irreducible.

(c) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ is a ring; show that it is an integral domain.

(d) Show that $2+\sqrt{-5}$ is irreducible and that it divides 9 in A.

(e) Is $2+\sqrt{-5}$ prime? Justify your answer.

Question 3: (10 points)

(a) Définir un anneau factoriel et un anneau principal.

(b) Donner l'énoncé de la caractérisation des anneaux factoriels en termes de propriétés de chaînes d'idéaux et du pgcd.

(c) Démontrer que tout anneau principal est factoriel. Vous pouvez utiliser le théorème en (b) si vous voulez.

(a) Define a UFD and a PID.

(b) State the theorem characterizing UFDs in terms of chains of ideals and the gcd.

(c) Prove that each PID is a UFD. You may use the theorem from (b) if you like.

Question 4: (8 points)

Soit $m(x) = 2x^3 - 2$. Factoriser $m(x)$ en irréductibles sur chacun des anneaux suivants: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Z}_3$. Dans chaque cas, $\boxed{\text{encadrer}}$ chaque facteur irréductible.

Let $m(x) = 2x^3 - 2$. Factor $m(x)$ into irreducibles over each of the following rings: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Z}_3$. In each case, put a $\boxed{\text{box}}$ around each irreducible factor.

Question 5: (8 points)

(a) Définir un élément algébrique d'une extension de corps E sur F.

(b) Démontrer que si $F \subseteq E$ et $u, v \in E$ et $[F(u) : F] = n$ et $[F(v) : F] = m$ alors $[F(u, v) : F] \leq mn$, et que c'est égale à mn si $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

(a) Define an algebraic element of a field extension E of F.

(b) Show that if $F \subseteq E$ and $u, v \in E$ and $[F(u) : F] = n$ and $[F(v) : F] = m$ then $[F(u, v) : F] \leq mn$, and it is equal to mn if $\gcd(m, n) = 1$.

Question 6: (10 points)

(a) Démontrer que $p(x) = x^3 - x^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}_3$.

(b) Construire un corps E d'ordre 27.

(c) Soit u une racine de $p(x)$ dans E; exprimer l'élément $(u^2 + 1)^{-1}$ comme un polynôme dans u sur $\mathbb{Z}_3$.

(d) Est-ce que u est un élément primitif de $E^\times$? Définir et justifier.

(a) Prove that $p(x) = x^3 - x^2 + 1$ is irreducible over $\mathbb{Z}_3$.

(b) Construct a field E of order 27.

(c) Let u be a root of $p(x)$ in E; express $(u^2+1)^{-1}$ as a polynomial in u over $\mathbb{Z}_3$.

(d) Is u a primitive element of $E^\times$? Define and justify.

Question 7: (4 points)

De l'oeuvre *Brahmasphutasiddhanta* (Doctrine correctement établie de Brahma) publié par Brahmagupta vers 628 apr. J.-C.:

Une vieille femme va au marché et un cheval monte sur son panier et écrase les oeufs. Le cavalier offre de payer les dommages et lui demande combien d'oeufs elle a apporté. Elle ne se souvient pas du nombre exact, mais lorsqu'elle en a sorti deux à la fois, il restait un oeuf. La même chose s'est produite quand elle les a choisis trois, quatre, cinq et six à la fois, mais quand elle les a pris sept à la fois ils sont sortis même. Quel est le plus petit nombre d'oeufs qu'elle aurait pu avoir?

Reformuler en une application du théorème des restes chinois, et puis résoudre.

From Brahma-Sphuta-Siddhanta *(Correctly Established Doctrine of Brahma) published by Brahmagupta ca 628 CE:*

An old woman goes to market and a horse steps on her basket and crushes the eggs. The rider offers to pay for the damages and asks her how many eggs she had brought. She does not remember the exact number, but when she had taken them out two at a time, there was one egg left. The same happened when she picked them out three, four, five, and six at a time, but when she took them seven at a time they came out even. What is the smallest number of eggs she could have had?

Reformulate as an application of the Chinese Remainder Theorem, and then solve.