Université d'Ottawa

Département de mathématiques et de statistique

MAT 3543: Examen mi-session (11 mars 2016)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ______________________________

Prénom: ______________________________

No. d'étudiant : ______________________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger votre solutions. Écrivez lisiblement.
- Commencez une nouvelle page dans le cahier pour chaque exercice.

Règle de la Faculté de sciences: Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours. Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur vous-mêmes. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées, ce qui pourrait engendrer une attribution d'une note de 0 (= zéro) pour cet examen.
En apposant votre signature, vous reconnaissez l'importance de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature:

Quest.	1	2	3	4	5	Total
max.	12	8	12	12	9	53
score						

1. (12 points) (a) Soit R un anneau commutatif. Définir les notions d'un (i) idéal premier et (ii) idéal maximal.

(b) Donner un exemple d'un idéal premier qui n'est pas maximal (sans justification).

(c) Trouver tous les idéaux dans $\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, et identifier ceux qui sont premiers ou maximaux.

2. (8 points) Prouver que le polynôme f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ pour

(a) $f = 3x^3 + 5x^2 + x + 2$,

(b) $f = x^5 + 6x^4 + 12x + 15$.

3. (12 points) Soit F un corps et soit $0 \neq I \triangleleft F[x]$ un idéal de $F[x]$. Prouver qu'il y a un polynôme unitaire $h \in F[x]$ tel que $I = \langle h \rangle$.

4. (12 points) Soit R un anneau intègre.

(a) Donner la définition d'un élément irréductible et la définition d'un élément premier dans R.

(b) Montrer qu'un élément premier est un élément irréductible.

5. (9 points) Soit $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{m + n\sqrt{-3} : m, n \in \mathbb{Z}\}$; c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, donc un anneau intègre. (Il n'est pas nécessaire de prouver ça). Montrer:

(a) $\{\pm 1\} = R^\times = \{x \in R : N(x) = 1\}$, où $N : R \to \mathbb{N}$ est définie par $N(m + n\sqrt{-3}) = m^2 + 3n^2$.

(b) $1 + \sqrt{-3}$ est irréductible, mais pas premier.