Université d'Ottawa

Département de mathématiques et de statistique

MAT 3543: Examen final (avril 2016)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ________________________________

Prénom: ______________________________

No. d'étudiant : _______________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions. Écrivez lisiblement.
- L'examen a pages. Vous trouverez une page supplémentaire la fin.

Règlement de la Faculté des sciences: Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours. Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur vous-mêmes. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées, ce qui pourrait engendrer une attribution d'une note de 0 (= zéro) pour cet examen.
En apposant votre signature, vous reconnaissez l'importance de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature:

Quest.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
max.	10	10	8	10	8	8	10	12	5 (bon.)	76
score										

`Bonne chance!`

1. (10 points) Soit R un anneau arbitraire (pas nécessairement commutatif).

(a) Donner la définition d'un idéal maximal et d'un anneau simple.

(b) Soit $I \triangleleft R$ un idéal dans R. Prouver: I est un idéal maximal si et seulement si R/I est un anneau simple.

(c) Donner tous les idéaux maximaux dans $\mathbb{Z}$ (sans justification).

2. (10 points) Soit F un corps, et soient $f, g \in F[x]$ des polynômes non nuls.

(a) Donner la définition d'un pgcd de f et g.

(b) Prouver qu'un pgcd de f et g existe.

3. (8 points) Trouver toutes les racines rationnelles de $f = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ et écrire f comme produit des polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$.

4. (10 points) Soit F un corps, $p \in F[x]$ un polynôme irréductible, et $h = p^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On pose $R = F[x]/\langle h \rangle$. Soit I l'image canonique de $\langle p \rangle \triangleleft F[x]$ dans R (donc $I = \{f + \langle h \rangle \in R : p \mid f\}$). Prouver:

$$I = \{r \in R : r \text{ nilpotent }\}, \quad \text{et} \quad R \setminus I = \{r \in R : r \text{ inversible}\}.$$

5. (8 points) Soit R un anneau intègre muni d'une fonction $\delta : R \to \mathbb{N}$ avec la propriètè que pour $a, b \in R$, $b \neq 0$, il y a $q, r \in R$ tels que $a = qb + r$ et $r = 0$ ou $\delta(r) < \delta(b)$. Prouver que R est un anneau principal.

6. (8 points) Soit E/F une extension. (a) Donner les définitions suivantes:

(i) $u \in E$ est algébrique sur F,

(ii) E/F est une extension algébrique,

(iii) E/F est une extension finie.

(b) Prouver: Si E/F est une extension finie, alors E/F est une extension algébrique.

7. (10 points) Trouver un corps de décomposition E du polynôme $f = x^4 - x^2 - 2$, déterminer $[E : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $E/\mathbb{Q}$.

8. (12 points) (a) Déterminer tous les idéaux $I \triangleleft \mathbb{F}_2[x]$ tels que $\mathbb{F}_2[x]/I \cong \mathbb{F}_8$ (rappel: $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}_8$ est le corps d'ordre 8). Vous devez justifier votre réponse.

(b) Pour votre choix de I, trouver un élément primitif de $\mathbb{F}_8$.

9. (5 points bonis). Vrai ou faux? Vous devez justifier votre réponse. Vous pouvez utiliser tous les théorèmes vus en classe.

(a) Dans $\mathbb{Z}[i]$ l'élément $1 + i$ est un élément premier, qui n'est pas irréductible.

(b) $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

(c) $\mathbb{Z}[x]$ est un anneau factoriel.