

University of Ottawa
Department of Mathematics and Statistics

MAT 3543 : Théorie des Anneaux
Professor : Hadi Salmasian

Examen de mi-session

28 fevrier, 2014

Surname _____ First Name _____

Student # _____

Instructions :

- (a) You have 80 minutes to complete this exam.
- (b) The number of points available for each question is indicated in square brackets.
- (c) All work to be considered for grading should be written in the space provided. The reverse side of pages is for scrap work. If you find that you need extra space in order to answer a particular question, you should continue on the reverse side of the page and indicate this **clearly**. Otherwise, the work written on the reverse side of pages will not be considered for marks.
- (d) Write your student number at the top of each page in the space provided.
- (e) No notes, books, scrap paper, calculators or other electronic devices are allowed.
- (f) You are strongly recommended to write in **pen**, not pencil.
- (g) You may use the last page of the exam as scrap paper.

Good luck !

Please do not write in the table below.

Question	1	2	3	4	Total
Maximum	6	7	4	5	22
Grade					

1.

- (a) [2 pt] Donner la définition d'un idéal principal d'un anneau R .
- (b) [1 pt] Donner la définition d'un anneau simple.
- (c) [1 pt] Donner la définition d'une algèbre à division.
- (d) [1 pts] Donner un exemple d'un anneau simple qui n'est pas une algèbre à division.
(Il n'est pas nécessaire de démontrer que votre exemple satisfait les propriétés ci-dessus.)
- (e) [1 pts] Vrai ou faux?
- Soient R et S deux anneaux simples. Alors, $R \times S$ est un anneau simple.
Vous devez justifier votre réponse.

Student # _____

MAT 3543 Examen de mi-session

2. (a) [3 pts] Déterminer le nombre d'éléments inversibles de \mathbb{Z}_{88} . Vous devez justifier votre réponse.

(b) [1 pt] Est-ce que le polynôme $x^4 - 15x + 10$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$? Justifiez votre réponse.

(c) [1 pt] Est-ce que le polynôme $x^4 - 15x + 10$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$? Justifiez votre réponse.

(d) [2 pts] Trouver toute les racines rationnelles de $x^4 + 7x - 2$, si elles existent. (Justifiez votre réponse.)

Student # _____

MAT 3543 Examen de mi-session

3. [4 pts] Déterminer tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$ (produit cartésien). Lequels d'entre eux sont premiers? Vous devez justifier vos réponses.

4. (a) [3 pts] Donner la démonstration de Lemme de Gauss :

Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Supposons que $f(x) = g(x)h(x)$ où $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Soit p un nombre premier tel que p divise tous les coefficients de $f(x)$. Alors, au moins l'une des deux conditions suivantes est vraie :

- p divise tous les coefficients de $g(x)$.
- p divise tous les coefficients de $h(x)$.

(b) [2 pts] Donner la démonstration du théorème suivant :

— Soient R un anneau commutatif et I un idéal de R tel que R/I est un anneau intègre. Alors, I est un idéal premier de R .

Student # _____

MAT 3543 Examen de mi-session

This page is intentionally left blank. You may use it as scrap paper.