University of Ottawa

Department of Mathematics and Statistics

MAT 3543 : Théorie des Anneaux

Professor : Hadi Salmasian

Examen de mi-session

28 fevrier, 2014

Surname ______________________ First Name ______________________

Student # ______________________

Instructions :

(a) You have 80 minutes to complete this exam.

(b) The number of points available for each question is indicated in square brackets.

(c) All work to be considered for grading should be written in the space provided. The reverse side of pages is for scrap work. If you find that you need extra space in order to answer a particular question, you should continue on the reverse side of the page and indicate this **clearly**. Otherwise, the work written on the reverse side of pages will not be considered for marks.

(d) Write your student number at the top of each page in the space provided.

(e) No notes, books, scrap paper, calculators or other electronic devices are allowed.

(f) You are strongly recommended to write in **pen**, not pencil.

(g) You may use the last page of the exam as scrap paper.

Good luck !

Please do not write in the table below.

Question	1	2	3	4	Total
Maximum	6	7	4	5	22
Grade					

1.

(a) **[2 pt]** Donner la définition d'un idéal principal d'un anneau R.

Solution: Soient R un anneau et $a \in Z(R)$. Alors l'ensemble

$$Ra = aR = \{ar \ : \ r \in R\}$$

est un idéal de R, qui s'appelle *idéal principal* engendré par a.

(b) **[1 pt]** Donner la définition d'un anneau simple.

Solution: Un anneaux $R \neq \{0\}$ est dit simple s'il n'a aucun idéal que $\{0\}$ et R.

(c) **[1 pt]** Donner la définition d'une algèbre à division.

Solution: Un anneau R est appelé une algèbre à division si chaque élément non nul de R est inversible.

(d) **[1 pts]** Donner un exemple d'un anneau simple qui n'est pas une algèbre à division.
(Il n'est pas necessaire de démontrer que votre exemple satisfait les propriétés ci-dessus.)

Solution: Par exemple, si $\Bbbk$ est un corps, l'anneau $M_n(\Bbbk)$ est simple, mais il n'est pas une algèbre à division.

(e) **[1 pts]** Vrai ou faux ?

- Soient R et S deux anneaux simples. Alors, $R \times S$ est un anneau simple.

Vous devez justifier votre réponse.

Solution: C'est faux, parce que $R \times \{0\}$ et $\{0\} \times S$ sont deux idéaux propre (et non nul) de $R \times S$.

2. (a) **[3 pts]** Détérminer le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}_{88}$. Vous devez justifier votre réponse.

Solution: Puisque $88 = 8 \times 11$, par le théorème chinois on a $\mathbb{Z}_{88} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}$ et donc $\mathbb{Z}_{88}^* = \mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_{11}^*$. Remarquons que

— 11 est premier, donc $\mathbb{Z}_{11}$ est un corps, et $|\mathbb{Z}_{11}^*| = 10$.

— Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ sont $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$, car

$$\overline{1} \times \overline{1} = \overline{1}, \quad \overline{3} \times \overline{3} = \overline{1}, \quad \overline{5} \times \overline{5} = \overline{1}, \quad \overline{7} \times \overline{7} = \overline{1}.$$

Par suite, $|\mathbb{Z}_{88}^*| = 40$.

(b) **[1 pt]** Est-ce que le polynôme $x^4 - 15x + 10$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$? Justifiez votre réponse.

Solution: Il est irréductible par le lemme d'Eisenstein pour $p = 5$.

(c) **[1 pt]** Est-ce que le polynôme $x^4 - 15x + 10$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$? Justifiez votre réponse.

Solution: Il est réductible parce que tout polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ se factorise comme un produit des polynômes de degré au plus 2.
Puisque $\deg(x^4 - 15x + 10) = 4$, on peut le factoriser dans $\mathbb{R}[x]$. (d) **[2 pts]** Trouver

toute les racines rationelles de $x^4 + 7x - 2$, si elles existent. (Justifiez votre réponse.)

Solution: Les racine rationelle de

$$x^4 + 7x - 2$$

sont parmi $\{1, 2, -1, -2\}$. Il est facile de vérifier que la seule racine rationalle est $x = -2$.

3. **[4 pts]** Déterminer tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$ (produit cartésien). Lequels d'entre eux sont premiers ? Vous devez justifiez vos réponses.

Solution: Par Proposition 1.89, tout idéal de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$ est de la forme $A \times B$ où A est un idéal de $\mathbb{Z}_4$, et B est un idéal de $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{C}$ est un corps, les idéaux de $\mathbb{C}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}$. Les idéaux de $\mathbb{Z}_4$ sont :

— $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

— $2\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{2}\}$.

— $\{\overline{0}\}$.

Par conséquent, les idéaux de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$ sont les suivants :

— $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$: n'est pas premier car il n'est pas propre.

— $2\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$: premier parce que :

$(a,b)(a',b') \in 2\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C} \;\Rightarrow\; aa' \in 2\mathbb{Z}_4 \;\Rightarrow\; a \in 2\mathbb{Z}_4$ ou $a' \in 2\mathbb{Z}_4 \;\Rightarrow\; (a,b) \in 2\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$ ou $(a',b') 2\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{C}$.

— $\{\overline{0}\} \times \mathbb{C}$: n'est pas premier parce que

$$(\overline{2}, 1)(\overline{2}, 1) = (\overline{0}, 1) \in \{\overline{0}\} \times \mathbb{C} \text{ mais } (\overline{2}, 1) \notin \{\overline{0}\} \times \mathbb{C}.$$

— $\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$: premier parce que

$(a,b)(a',b') \in \mathbb{Z}_4 \times \{0\} \;\Rightarrow\; bb' = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$ ou $b' = 0 \;\Rightarrow\; (a,b) \in \mathbb{Z}_4 \times \{0\}$ ou $(a',b') \in \mathbb{Z}_4 \times \{0\}$.

— $2\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$: n'est pas premier parce que

$(\overline{0}, 1)(\overline{1}, 0) = (\overline{0}, 0) \in 2\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$ mais $(\overline{0}, 1) \notin 2\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$ et $(\overline{1}, 0) \notin 2\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$.

— $\{\overline{0}\} \times \{0\}$: n'est pas premier parce que

$(\overline{0}, 1)(\overline{1}, 0) = (\overline{0}, 0) \in \{\overline{0}\} \times \{0\}$ mais $(\overline{0}, 1) \notin \{\overline{0}\} \times \{0\}$ et $(\overline{1}, 0) \notin \{\overline{0}\} \times \{0\}$.

4. (a) **[3 pts]** Donner la démonstration de Lemme de Gauss :
Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Supposons que $f(x) = g(x)h(x)$ où $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Soit p un nombre premier tel que p divise tous les coefficients de $f(x)$. Alors, au moins l'une des deux conditions suivantes est vraie :

- p divise tous les coefficients de $g(x)$.
- p divise tous les coefficients de $h(x)$.

Solution: Posons

$$\sigma : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]\ ,\ \sigma(a_0 + \cdots + a_k x^k) := \overline{a}_0 + \cdots + \overline{a}_k x^k.$$

Il est facile de vérifier que σ est un homomorphisme d'anneaux. De plus,

$$\sigma(g(x))\sigma(h(x)) = \sigma(f(x)) = 0.$$

Puisque $\mathbb{Z}_p$ est un corps, $\mathbb{Z}_p[x]$ est un anneau intègre. Donc, $\sigma(g(x)) = 0$ ou $\sigma(h(x)) = 0$.

(b) **[2 pts]** Donner la démonstration du théorème suivant :

— Soient R un anneau commutatif et I un idéal de R tel que R/I est un anneau intègre. Alors, I est un idéal premier de R.

Solution: supposons que R/I est un anneau intègre. Alors,

$ab \in I \;\Rightarrow\; (I+a)(I+b) = I+ab = I+0 \;\Rightarrow\; I+a = 0$ ou $I+b = I+0 \;\Rightarrow\; a \in I$ ou $b \in I$.