Université d'Ottawa

Département de mathématiques et de statistique

MAT 3543 : Théorie des Anneaux

Professeur : Hadi Salmasian

Examen Final

15 avril, 2014

Nom de famille ____________________ Prénom ____________________

Numero d'étudiant(e) # ____________________

Instructions :

(a) Vous avez 3 heures pour compléter ce test.

(b) Le nombre de points disponibles pour chaque question est indiqué entre crochets.

(c) Vous devez justifier vos réponses pour recevoir le maximum de points. Toutes vos réponses doivent être écrites dans l'espace prévu. Si vous avez besoin d'espace supplémentaire pour répondre à une question particulière, vous devez continuer au verso de la page et l'indiquer **clairement**.

(d) Veuillez écrire votre numéro d'étudiant(e) en en-téte de chaque page dans l'espace prévu.

(e) Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes, ni aucun livre. L'usage de téléphones cellulaires et de calculatrices n'est pas autorisé.

(f) Il est strictement conseillé que vous écriviez vos réponse avec un **stylo** (au lieu d'un crayon). write in **pen**, not pencil.

(g) La dernière page de l'examen peut être utilisé comme brouillon.

Bonne chance !

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Maximum	7	6	10	4	7	5	5	7	5	3	3	62
Note												

1. (a) **[2 points]** Soit R un anneau intègre. Donner la définition d'un élément premier de R.

(b) **[2 points]** Soit R un anneau intègre. Soient $a_1, \ldots, a_n \in R$ des éléments non nuls. Donner la définition de "pgcd" de $a_1, \ldots, a_n$

(c) **[3 points]** Calculer le pgcd de $2x^4 + 2x$ et $x(x^2 + 1)$ comme des éléments de $\mathbb{R}[x]$. Vous devez justifier votre réponse.

2. (a) **[4 points]** Soient R et S deux anneaux commutatifs et soit $I \subseteq R \times S$ un idéal principal. Montrer que $I = A \times B$ tel que $A \subseteq R$ et $B \subseteq S$ sont des idéaux principaux.

(b) **[2 points]** Soit R un anneau intègre. Donner la définition de la condition ACCP.

3. Vrai ou faux ? Vous devez justifier vos réponses.

(a) **[2 points]** $\mathbb{Z}_6[x]$ est un anneau factoriel.

(b) **[2 points]** $x^3 - 3x + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(c) **[2 points]** L'application

$$\sigma : \mathrm{GF}(32) \to \mathrm{GF}(32)\ ,\ \sigma(x) = x^4$$

est un automorphisme de $\mathrm{GF}(32)$.

(d) **[2 points]** $\pi^2 + \pi$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$. ($\pi = 3.1415\cdots$).

(e) **[2 points]** L'anneau $\mathbb{Z}[x]$ avec

$$\delta : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{N} \quad , \quad \delta(f(x)) = \deg(f(x))$$

est un anneau euclidien.

4. **[4 points]** Montrer que $2-3\sqrt{-1}$ est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, où

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a+b\sqrt{-1} \ : \ a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

5. **[7 points]** Déterminer tous les idéaux $I \subseteq \mathbb{Z}_3[x]$ tels que $\mathbb{Z}_3[x]/I \cong \mathrm{GF}(9)$. Vous devez justifier votre réponse.

(Puisque $\mathbb{Z}_3[x]$ est un anneau principal, vous pouvez décrire chaque idéal par son generateur.)

6. (a) **[2 points]** Soient $\mathbb{F}$ un corps et $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Donner la définition de corps de décomposition de $f(x)$.

(b) **[3 points]** Soient p un nombre premier, et $n \in \mathbb{Z}^+$. Montrer que $\mathrm{GF}(p^n)$ est le corps de décomposition de $f(x) = x^{p^n-2} + x^{p^n-3} + \cdots + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

7. **[5 points]** Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}]$, et donner une base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}})$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Vous devez justifier votre réponse.

8. Soit $\mathbb{F}$ le corps de décomposition de $f(x) = (x^2+3)(x^2+3x+1) \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) **[3 points]** Trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.

(b) **[4 points]** Donner une base de $\mathbb{F}$ (comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$).

Vous devez justifiez que les vecteurs dans la base sont linéairement independents.

9. (a) **[1 point]** Donner un exemple d'un isomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ tel que

$$\exists_{f(x)\in\mathbb{C}[x]} \ : \ \sigma(f(x)) \neq f(x).$$

(b) **[4 points]** Soient $\mathbb{F}$ un corps et $\sigma : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ un homomorphisme d'anneaux. Supposons que σ est surjectif. Montrer que σ est un isomorphisme.

10. **[3 points]** Donner la démonstration du théorème suivant :

Soient $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ une extension de corps, et $u \in \mathbb{K}$ algébrique sur $\mathbb{F}$. Soit $m(x) \in \mathbb{F}[x]$ le polynôme minimal de u sur $\mathbb{F}$. Alors, $m(x)$ est irréductible.

11. **[3 points]** Donner la démonstration du théorème de Kronecker :

Soient $\mathbb{F}$ un corps et $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ un polynôme non constant. Alors, il existe une extension de corps $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = (x - a)g(x) \text{ où } a \in \mathbb{K} \text{ et } g(x) \in \mathbb{K}[x].$$

This page is intentionally left blank. You may use it as scrap paper.