Université d'Ottawa

Departement de Mathématiques et de Statistique

MAT 3543: Examen mi-session (9 mars 2012)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ______________________________

Prénom: ______________________________

No. d'étudiant : ______________________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger votre solutions. Écrivez lisiblement.

Quest.	1	2	3	4	Total
max.	16	18	15	16	65
score					

1. (a) (5 points) Soient $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f = 2x^3 + 2x \in \mathbb{Z}_3[x]$ et $g = 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Trouver q, $r \in \mathbb{Z}_3[x]$ tels que $f = qg + r$ avec $\deg r < 2$.

(b) (5 points) Montrer que $x^3 - 8x^2 + 5x + 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

(c) (6 points) Est-ce que $x^3 - 8x^2 + 5x + 3$ (voir (b)) est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$? Dans $\mathbb{R}[x]$?

2. (a) (3 points) Donner la définition d'un idéal maximal M dans un anneau R.

(b) (5 points) Donner un example d'un idéal maximal dans l'anneau R ou
(i) $R = \mathbb{Z}$, (ii) $R = \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(c) (10 points) Prouver qu'un idéal I dans un anneau R est un idéal maximal si et seulement si R/I est un anneau simple.

3. Soit F un corps.

(a) (3 points) Donner la définition d'un élément irréductible dans $F[x]$.

(b) (4 points) Donner un example d'un polynôme irréductible et un exemple d'un polynôme non-irréductible dans $F[x]$.

(c) (8 points) Prouver: Si $p \in F[x]$ est irréductible, alors $F[x]/\langle p\rangle$ est un corps.

4. Soit R un anneau intègre.

(a) (3 points) Pour $a, b \in R$ définir la relation $a \sim b$.

(b) (7 points) Soient $a, b, a', b' \in R$ tels que $a \sim a'$ et $b \sim b'$. Montrer: $a \mid b \iff a' \mid b'$.

(c) (6 points) Soient $R = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer:
(i) $R^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.
(ii) $(2 + i) \sim (1 - 2i)$, mais $(1 + 2i) \not\sim (2 + i)$.