Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 3543: Examen final (avril 2012)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ______________________________

Prénom: ______________________________

No. d'étudiant: ______________________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions. Écrivez lisiblement.
- Vous trouverez 2 pages supplémentaires à la fin.

Quest.	1	2	3	4	5	6	7	Total
max.	11	17	13	27	12	12	8	98
score								

1. Soit R un anneau commutatif.

(a) (4 points) Donner la définition d'un idéal premier P dans R et la définition d'un anneau intègre.

(b) (7 points) Prouver: Si R est un anneau intègre, alors P est un idéal premier.

2. Soit F un corps.

(a) (2 points) Donner la définition d'un polynôme irréductible dans $F[x]$.

(b) (3 points) Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles:

(1) $x^5 + 15x^2 + 30x + 5$ dans $\mathbb{Q}[x]$,
(2) $x^3 + 7x - 5$ dans $\mathbb{Q}[x]$,
(3) $x^2 + x + 1$ dans $\mathbb{Z}_2[x]$.

(c) (4 points) Construire $GF(4)$, et son tableau de multiplication. Trouver un élément primitif dans $GF(4)$.

(d) (8 points) Soit $p \in F[x]$. Prouver: Si $F[x]/\langle p\rangle$ est un corps, alors p est irréductible.

3. Soit $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{m + n\sqrt{-3} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(a) (3 points) Prouver $R^\times = \{\pm 1\}$. (Utiliser $N(m + n\sqrt{-3}) = m^2 + 3n^2$.)

(b) (6 points) Montrer que 2 est un élément irréductible de R.

(c) (4 points) Est-ce que R est un anneau factoriel? (On a $2 \cdot 2 = 4 = (1 + \sqrt{-3})\,(1 - \sqrt{-3})$.)

4. Soit E/F une extension.

(a) (4 points) Donner la définition pour:

(1) $u \in E$ est algébrique sur F.
(2) E/F est une extension algébrique.

(b) (7 points) Prouver: Si E/F est une extension finie, alors E/F est une extension algébrique.

(c) (16 points) Utiliser le théorème sur la multiplicité de degrés des extensions pour prouver:

(i) Si $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ sont algébriques sur F, alors $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est un extension finie de F.

(ii) Si D/F est une sous-extension algébrique de E/F, alors chaque $e \in E$ qui est algébrique sur D l'est aussi sur F.

5. (a) (2 points) Soit F un corps et soit $f \in F[x]$ de degré ≥ 1. Donner la définition d'un corps de décomposition de f sur F.

(b) (10 points) Soit E un corps de décomposition de $x^6 + x^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Trouver $[E : \mathbb{Q}]$ et une base de $E/\mathbb{Q}$.

6. (12 points) Donner un exemple (sans preuve)

(1) d'un anneau non-commutatif,

(2) d'un anneau commutatif, qui n'est pas un anneau intègre,

(3) d'un corps gauche, qui n'est pas un corps,

(4) d'un homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$,

(5) d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ de degré n, $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ arbitraire,

(6) d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ de degré ≥ 2,

(7) d'un anneau factoriel, qui n'est pas un anneau principal,

(8) d'un anneau euclidien,

(9) d'une extension transcendante,

(10) d'une extension algébrique de degré ∞,

(11) d'un corps algébriquement clos, qui n'est pas $\mathbb{C}$,

(12) d'un idéal non-maximal mais premier dans $\mathbb{Z}$.

7. (8 points) Soit R un anneau commutatif tel que l'intersection de tous ses idéaux premiers soit nulle. Montrer que R est isomorphe à un sous-anneau d'un produit de corps.