NOM: ________________	Prénom: ________________
# d'étudiant: ________________	
Signature: ________________	

Mat 3543 Hiver 2010

Examen de mi-session (26 février 2010)

- **Dans cet examen, tous les anneaux sont commutatifs.**
- **Justifiez chacune de vos assertions.**

---

(1) (8 pts) Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif.
Montrez que si tout idéal de A est principal, alors tout idéal de B est principal.

---

(2) (4 pts) Soit $\pi : \mathbb{Z}[X,Y] \to \mathbb{Z}[X,Y]/(XY^2)$ l'épimorphisme canonique. Considérez les éléments $a = \pi(X)$ et $b = \pi(Y)$ de l'anneau $R = \mathbb{Z}[X,Y]/(XY^2)$. Montrez que $a^2b \neq 0$ et $ab^2 = 0$.

(3) (4 pts) Quelle est la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[t]/(2t)$?

(4) (a) (3 pts) Soient A un anneau et $\alpha \in A$. On sait que $e_\alpha : A[t] \to A$, $f \mapsto f(\alpha)$, est un homomorphisme d'anneaux. Montrez que $\ker(e_\alpha) = (t - \alpha)$.

(b) (3 pts) Montrez que si A est un anneau et $\alpha \in A$, alors $A[t]/(t-\alpha) \cong A$.

(c) (2 pts) Déduisez que $\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z + 1) \cong \mathbb{R}[X, Y]$.

(d) (2 pts) L'idéal $(X^2 + Y^3 + Z + 1)$ de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ est-il premier? Est-il maximal?

(5) (5 pts) Montrez qu'il existe un idéal I de $\mathbb{Z}[X, Y]$ tel que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X, Y]/I$ est isomorphe au sous-anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ de $\mathbb{R}$.
Remarque: on ne vous demande pas de décrire les éléments de I, ou de trouver des générateurs de I.

(6) (5 pts) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A. Montrez qu'il existe un corps K et un homomorphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} K$ tels que $\ker(\varphi) = \mathfrak{p}$.