NOM: ______________________	Prénom: ______________________
# d'étudiant:	______________________
Signature:	______________________

Mat 3543 Hiver 2010

Examen de mi-session (26 février 2010)

- **Dans cet examen, tous les anneaux sont commutatifs.**
- **Justifiez chacune de vos assertions.**
- **Le test a été compté sur 31 points, plutôt que sur 36.**

---

(1) (8 pts) Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif.
Montrez que si tout idéal de A est principal, alors tout idéal de B est principal.

Soit J un idéal de B.

Soit $I = \varphi^{-1}(J)$; on sait que I est un idéal de A. Puisque tout idéal de A est principal, il existe $a \in A$ tel que $I = (a)$. Montrons que J est l'idéal principal de B engendré par l'élément $b = \varphi(a)$.

Puisque $a \in I = \varphi^{-1}(J)$, on a $\varphi(a) \in J$, donc $b \in J$, donc $(b) \subseteq J$.

Soit $y \in J$. Puisque φ est surjectif, il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) = y$. En fait, on a $x \in I$ parce que $\varphi(x) = y \in J$ implique $x \in \varphi^{-1}(J) = I$. Comme $x \in I = (a)$, il existe $\alpha \in A$ tel que $x = a\alpha$. Alors $y = \varphi(x) = \varphi(a\alpha) = \varphi(a)\varphi(\alpha) = b\varphi(\alpha) \in (b)$.

Le paragraphe précédent montre que $J \subseteq (b)$, donc en fait $J = (b)$.

Donc J est un idéal principal.

(2) (4 pts) Soit $\pi : \mathbb{Z}[X,Y] \to \mathbb{Z}[X,Y]/(XY^2)$ l'épimorphisme canonique. Considérez les éléments $a = \pi(X)$ et $b = \pi(Y)$ de l'anneau $R = \mathbb{Z}[X,Y]/(XY^2)$. Montrez que $a^2b \neq 0$ et $ab^2 = 0$.

On a $\ker \pi = (XY^2)$, donc $XY^2 \in \ker \pi$, donc

$$0 = \pi(XY^2) = \pi(X)\pi(Y)^2 = ab^2.$$

Montrons que $X^2Y \notin (XY^2)$.
On procède par contradiction: supposons que $X^2Y \in (XY^2)$.
Alors il existe $f \in \mathbb{Z}[X,Y]$ tel que $X^2Y = XY^2 f$. Remarquez que $f \neq 0$ (car $X^2Y \neq 0$), donc $\deg_Y(f) \geq 0$. Alors

$$1 = \deg_Y(X^2Y) = \deg_Y(XY^2 f) = 2 + \deg_Y(f) \geq 2,$$

ce qui est absurde.

Ceci prouve que $X^2Y \notin (XY^2) = \ker \pi$. Donc

$$0 \neq \pi(X^2Y) = \pi(X)^2\pi(Y) = a^2b.$$

---

(3) (4 pts) Quelle est la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[t]/(2t)$?

Soit $\pi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}[t]/(2t)$ l'épimorphisme canonique, et soit $\mu : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[t]$ l'homomorphisme d'inclusion. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[t]/(2t)$ la composition, $\varphi = \pi \circ \mu$.

Remarquez que φ est l'unique homomorphisme de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}[t]/(2t)$. Donc la caractéristique de $\mathbb{Z}[t]/(2t)$ est l'unique $n \in \mathbb{N}$ qui satisfait $\ker \varphi = (n)$. Montrons que $n = 0$.

On a $n \in \ker \varphi$, donc $0 = \varphi(n) = \pi(\mu(n)) = \pi(n)$, donc $n \in \ker \pi = (2t)$, donc il existe $f \in \mathbb{Z}[t]$ tel que $n = 2tf$. Considérons le degré des polynômes dans $\mathbb{Z}[t]$. Alors $n \in \mathbb{Z}$ implique $\deg(n) \leq 0$, donc:

$$0 \geq \deg(n) = \deg(2tf) = 1 + \deg(f) \;\Rightarrow\; \deg(f) < 0 \;\Rightarrow\; f = 0 \;\Rightarrow\; n = 0.$$

Ainsi, la caractéristique de $\mathbb{Z}[t]/(2t)$ est 0.

(4) (a) (3 pts) Soient A un anneau et $\alpha \in A$. On sait que $e_\alpha : A[t] \to A$, $f \mapsto f(\alpha)$, est un homomorphisme d'anneaux. Montrez que $\ker(e_\alpha) = (t - \alpha)$.

(b) (3 pts) Montrez que si A est un anneau et $\alpha \in A$, alors $A[t]/(t - \alpha) \cong A$.

(c) (2 pts) Déduisez que $\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z + 1) \cong \mathbb{R}[X, Y]$.

(d) (2 pts) L'idéal $(X^2 + Y^3 + Z + 1)$ de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ est-il premier? Est-il maximal?

(a) Soit $f \in \ker(e_\alpha)$; alors $f(\alpha) = 0$. Puisque le coefficient dominant de $t - \alpha$ est $1 \in A^*$, il existe $q, r \in A[t]$ satisfaisant $f = (t - \alpha)q + r$ et $\deg(r) < \deg(t - \alpha)$. Donc $\deg(r) \leq 0$, autrement dit $r \in A$. Alors

$$0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = r$$

montre que $r = 0$ et conséquemment $f = (t - \alpha)q$ est élément de l'idéal principal $(t - \alpha)$ de $A[t]$. Ceci montre que $\ker(e_\alpha) \subseteq (t - \alpha)$. L'autre inclusion est triviale:

$$e_\alpha(t - \alpha) = \alpha - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t - \alpha \in \ker(e_\alpha) \quad \Rightarrow \quad (t - \alpha) \subseteq \ker(e_\alpha),$$

donc $\ker(e_\alpha) = (t - \alpha)$.

(b) L'homomorphisme $e_\alpha : A[t] \to A$ est surjectif (car si $a \in A$ alors le polynôme constant $a \in A[t]$ satisfait $e_\alpha(a) = a$) et son noyau est $(t - \alpha)$ en vertu de la question (a). Donc

$$A[t]/(t - \alpha) = A[t]/\ker(e_\alpha) \cong \operatorname{im}(e_\alpha) = A.$$

(c) Soit $A = \mathbb{R}[X, Y]$, alors $\mathbb{R}[X, Y, Z] = A[Z]$ est l'anneau des polynômes en une variable Z à coefficients dans A. Considérons l'élément $\alpha = -X^2 - Y^3 - 1 \in A$. En vertu de (b), on a

$$A[Z]/(Z - \alpha) \cong A,$$

et c'est exactement ce qu'on voulait démontrer, car $Z - \alpha = X^2 + Y^3 + Z + 1$.

(d) Puisque $\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z + 1) \cong \mathbb{R}[X, Y]$ est un anneau intègre mais pas un corps, l'idéal $(X^2 + Y^3 + Z + 1)$ est premier mais pas maximal.

(5) (5 pts) Montrez qu'il existe un idéal I de $\mathbb{Z}[X,Y]$ tel que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X,Y]/I$ est isomorphe au sous-anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ de $\mathbb{R}$.
Remarque: on ne vous demande pas de décrire les éléments de I, ou de trouver des générateurs de I.

Soit $\varepsilon : \mathbb{Z}[X,Y] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(\sqrt{2},\sqrt{3})$, l'homomorphisme d'évaluation.
Alors on sait que $\mathrm{im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$. Soit $I = \ker(\varepsilon)$, alors I est un idéal de $\mathbb{Z}[X,Y]$ satisfaisant

$$\mathbb{Z}[X,Y]/I \cong \mathrm{im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}].$$

---

(6) (5 pts) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A. Montrez qu'il existe un corps K et un homomorphisme d'anneaux $A \xrightarrow{\varphi} K$ tels que $\ker(\varphi) = \mathfrak{p}$.

Puisque $A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre, il existe un corps K et un homomorphisme injectif $A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} K$ (par exemple, on peut prendre $K = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ et $\mu =$ l'homomorphisme canonique).

Soit aussi $\pi : A \to A/\mathfrak{p}$ l'épimorphisme canonique, et soit $\varphi : A \to K$ la composition,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi=\mu\circ\pi"'] & A/\mathfrak{p} \arrow[r, "\mu"] & K. \end{tikzcd}$$

Puisque μ est injectif et $\ker\pi = \mathfrak{p}$, on a

$$\ker(\varphi) = \pi^{-1}(\ker\mu) = \pi^{-1}(0) = \ker\pi = \mathfrak{p}.$$