NOM DE FAMILLE :	______
PRÉNOM :	______
NO D'ÉTUDIANT :	______
Signature :	______

Examen final Mat 3543 hiver 2010

Professeur : D. Daigle   Durée de l'examen : 3 heures.

- **Notes de cours, manuels, calculatrices : non permis.**
- **Vous pouvez utiliser le verso des pages comme papier brouillon, ou pour répondre aux questions si l'espace prévu est insuffisant.**
- **Justifiez toutes vos assertions.**
- **Dans cet examen, tous les anneaux sont commutatifs.**

---

(1) Montrez que $\mathbb{Z}[t]$ n'est pas un anneau principal.

(2) Soit I un idéal d'un anneau A, et soit $I[t]$ l'ensemble des polynômes $f \in A[t]$ qui ont tous leurs coefficients dans I (donc $I[t]$ est un sous-ensemble de $A[t]$).

(a) Soit $\pi : A \to A/I$ l'épimorphisme canonique. Montrez que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : A[t] &\longrightarrow \big(A/I\big)[t] \\ \textstyle\sum_i a_i t_i &\longmapsto \textstyle\sum_i \pi(a_i) t^i \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'anneaux. (*Remarque :* il suffit de citer un résultat vu en classe et de s'assurer qu'il s'applique à la situation présente.)

(b) L'homomorphisme $\tilde{\pi}$ est-il surjectif ? Quel est le noyau de $\tilde{\pi}$?

(c) Montrez que $I[t]$ est un idéal de $A[t]$ et que $A[t]/I[t] \cong \big(A/I\big)[t]$.

(d) Montrez que I est un idéal premier de A si et seulement si $I[t]$ est un idéal premier de $A[t]$. (*Remarque.* Il est déconseillé d'utiliser la définition d'idéal premier. Utilisez plutôt (c) et des théorèmes vus en classe.)

(3) On a vu en classe le théorème suivant:

(∗) *Si* $\varphi : A \to B$ *est un homomorphisme d'anneaux surjectif, alors* $A/\ker(\varphi) \cong B$.

Déduisez de (∗) la conséquence suivante:

(∗∗) *Si* $\varphi : A \to B$ *est un homomorphisme d'anneaux surjectif, et si* J *est un idéal de* B*, alors* $A/\varphi^{-1}(J) \cong B/J$.

(4) (a) Énoncez la définition d'élément premier d'un anneau.

(b) Soit $p \neq 0$ un élément d'un anneau A. Montrez que si A/pA est un anneau intègre, alors p est un élément premier de A.

(c) En vous servant du résultat de la partie (b), montrez que Z est un élément premier de l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$.

Dans la question suivante, vous pouvez utiliser $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ sans le démontrer.

(5) Considérez le nombre réel $\alpha = \sqrt{-1 + \sqrt{5}}$.

(a) Montrez que $\{1, \sqrt{5}\}$ est une base de $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ sur $\mathbb{Q}$.

(b) Montrez que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ et que $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. (Suggestion: pour montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, vous pouvez vous servir de (a).)

(c) Déduisez de (b) qu'on a une **inclusion stricte** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{Q}[\alpha]$.

(d) Trouvez le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ et donnez la valeur de $\big[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{5}]\big]$.

(e) En vous servant de votre réponse à (d), déterminez la valeur de $\big[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}\big]$.

(f) Quel est le degré du polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$? Trouvez ce polynôme.

Remarque. Lorsque vous devez "trouver" un polynôme minimal, n'oubliez pas de prouver que votre polynôme est effectivement le polynôme minimal.

(6) Soit A un anneau, et soit K un corps qui est sous-anneau de A.
Montrez que si $[A : K] < \infty$, alors A est noethérien.

Remarque. On a vu que si A est intègre et $[A : K] < \infty$ alors A est un corps, donc en particulier A est noethérien. Vous ne pouvez pas utiliser cet argument parce qu'on ne suppose pas que A est intègre.

Remarque. En fait, si $[A : K] < \infty$ alors A est noethérien et artinien. Cependant, démontrez seulement que A est noethérien.

(7) L'anneau $\mathbb{Z}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ est-il noethérien ?
(Justifiez bien, en énonçant chaque résultat dont vous avez besoin.)