Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 3543: Examen final (avril 2008)

Professeur: Erhard Neher

Nom: ____________________

Prénom: ____________________

No. d'étudiant : ____________________

- Aucune note n'est permise.
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions. Écrivez lisiblement.
- Vous trouvez 2 pages supplementaires à la fin.

Quest.	1	2	3	4	5	6	Total
max.	12	13	12	14	12	12	75
score							

1. Soit F un corps.

(a) (2 points) Donnez la définition d'un polynôme irréductible dans $F[x]$.

(b) (10 points) Prouvez que les conditions suivantes sont équivalentes pour $h \in F[x]$ de degré ≥ 1:

(1) $F[x]/\langle h \rangle$ est un corps,

(2) $F[x]/\langle h \rangle$ est un anneau intègre,

(3) h est irréductible.

2. Soit $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{m + n\sqrt{-3} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(a) (3 points) Déterminez $R^\times$.

(b) (6 points) Montrez que 2 est un élément irréductible de R.

(c) (4 points) Est-ce que R est un anneau factoriel? (On a $2 \cdot 2 = 4 = (1 + \sqrt{-3})\,(1 - \sqrt{-3})$).

3. Soit E/F une extension.

(a) (2 points) Donnez la définition pour:

(1) $u \in E$ est algébrique sur F.

(2) E/F est une extension algébrique.

(b) (6 points) Soit E/F une extension algébrique et soit K/E une autre extension. Montrez que si $u \in K$ est algébrique sur E, alors u est aussi algébrique sur F. (Vous pouvez utiliser le théorème suivant: Une extension L/F est une extension finie si et seulement si $L = F(u_1, \ldots, u_n)$ où $u_1, \ldots, u_n$ sont algébriques sur F.)

(c) (4 points) Avec les notations de (b) prouvez que K/F est une extension algébrique si et seulement si K/E et E/F sont algébriques.

4. (a) (2 points) Soit F un corps et soit $f \in F[x]$ de degré ≥ 1. Donnez la définition d'un corps de décomposition de f sur F.

(b) (4 points) Énoncez deux théorèmes fondamentaux concernant des corps de décomposition.

(c) (8 points) Soit E un corps de décomposition de $x^6 + x^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Trouvez $[E : \mathbb{Q}]$ et une base de $E/\mathbb{Q}$.

5. (a) (2 points) Trouvez tous les polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{Z}_2$.

(b) (6 points) Prouvez que $x^4 + x + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}_2$.

(c) (4 points) Construisez GF(16) et trouvez un élément primitif de GF(16).

6. (12 points) Donnez un exemple (sans preuve)

(1) d'un anneau non-commutatif,

(2) d'un anneau commutatif, qui n'est pas un anneau intègre,

(3) d'un corps gauche, qui n'est pas un corps,

(4) d'un homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$,

(5) d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ de degré n, $n \in \mathbb{N}_+$ arbitraire,

(6) d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ de degré ≥ 2,

(7) d'un anneau factoriel, qui n'est pas un anneau principal,

(8) d'un anneau euclidien,

(9) d'une extension transcendante,

(10) d'une extension algébrique de degré ∞,

(11) d'un corps algébriquement clos, qui n'est pas $\mathbb{C}$,

(12) d'un nombre réell non-constructible.