Répondez aux questions (1), (2) et (3), et à une des questions (4), (5).

(1) Trouvez une forme normale de Smith de $\begin{pmatrix} 24 & 12 & 48 \\ 3 & 15 & -21 \\ 21 & -3 & 69 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$.

(2) Soient U, V des espaces vectoriels sur un corps K, et soient $S \in \mathrm{End}_K(U)$ et $T \in \mathrm{End}_K(V)$. Alors S détermine une structure de $K[x]$-module sur U, et T détermine une structure de $K[x]$-module sur V.

Montrez que, pour une fonction $f : U \to V$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un homomorphisme de $K[x]$-modules

(ii) f est une application linéaire satisfaisant $f \circ S = T \circ f$.

(3) Soit I un idéal d'un anneau intègre A, et supposons que I n'est pas principal. Montrez que le A-module I n'est pas une somme directe de la forme

$$I = Au_1 \oplus \cdots \oplus Au_n \qquad \text{avec } u_1, \ldots, u_n \in I.$$

(4) Soit M un module de type fini sur un anneau euclidien A, et supposons que M a la propriété suivante :

Si $a \in A$ et $u \in M$ satisfont $au = 0$, alors $a = 0$ ou $u = 0$.

Montrez que M est un module libre. (Conseil : utilisez le théorème de structure.)

(5) Considérez le sous-module N du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$ engendré par les trois éléments

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe une base (C_1, C_2) de $\mathbb{Z}^2$ et des éléments $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $d_1 \mid d_2$ et (d_1C_1, d_2C_2) est une base de N.

Trouvez d_1 et d_2.

(On ne vous demande pas de trouver C_1 et C_2, mais vous devez expliquer pourquoi les d_1, d_2 que vous donnez satisfont la condition demandée.)