Solution du test 2

Répondez aux questions (1), (2) et (3), et à une des questions (4), (5).

Les questions valent 6 points chacune, sauf la première qui vaut 5 points.

(1) Trouvez une forme normale de Smith de $\begin{pmatrix} 24 & 12 & 48 \\ 3 & 15 & -21 \\ 21 & -3 & 69 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$.

Réponse (5 pts) : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

(2) Soient U, V des espaces vectoriels sur un corps K, et soient $S \in \mathrm{End}_K(U)$ et $T \in \mathrm{End}_K(V)$. Alors S détermine une structure de $K[x]$-module sur U, et T détermine une structure de $K[x]$-module sur V.

Montrez que, pour une fonction $f : U \to V$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un homomorphisme de $K[x]$-modules

(ii) f est une application linéaire satisfaisant $f \circ S = T \circ f$.

Notation : si $\lambda \in K$ et $u \in U$, écrivons λu si ce produit est calculé en utilisant la structure d'espace vectoriel de U sur K, et $\lambda * u$ si on utilise la structure de $K[x]$-module. On a vu en classe que $\lambda * u = \lambda u$, mais c'est quand même utile de distinguer les deux. Similairement, si $\lambda \in K$ et $v \in V$ alors on distinguera λv de $\lambda * v$ aux endroits où c'est utile de faire cette distinction (on a $\lambda * v = \lambda v$ ici aussi).

- (4 pts) Supposons que f est un homomorphisme de $K[x]$-modules. Alors :

(a) Pour tout choix de $u_1, u_2 \in U$ on a $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.

(b) Pour tout choix de $\lambda \in K$ et $u \in U$, $f(\lambda u) = f(\lambda * u) = \lambda * f(u) = \lambda f(u)$.

(c) Pour chaque $u \in U$,

$$(f \circ S)(u) = f\big(S(u)\big) = f(xu) = xf(u) = T\big(f(u)\big) = (T \circ f)(u).$$

Donc f est une application linéaire satisfaisant $f \circ S = T \circ f$.

- (6 pts) Supposons que f est une application linéaire satisfaisant $f \circ S = T \circ f$. Alors :

(a) Pour tout choix de $u_1, u_2 \in U$ on a $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.

(b) On veut montrer que $f(pu) = pf(u)$ pour tout $p \in K[x]$ et $u \in U$. Autrement dit, si on définit le sous-ensemble S de $K[x]$ par $S = \{p \in K[x] \mid \forall_{u \in U}\ f(pu) = pf(u)\}$, alors on veut montrer que $S = K[x]$.
  - Si $\lambda \in K$ et $u \in U$ alors $f(\lambda * u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda * f(u)$.
  - Si $u \in U$ alors $f(xu) = f\big(S(u)\big) = (f \circ S)(u) = (T \circ f)(u) = T\big(f(u)\big) = xf(u)$.

  Donc $K \subseteq S$ et $x \in S$.

  Supposons que $p, q \in S$; alors pour chaque $u \in U$ on a
  - $f((p+q)u) = f(pu+qu) = f(pu)+f(qu) = pf(u)+qf(u) = (p+q)f(u)$
  - $f((pq)u) = f(p(qu)) = pf(qu) = p(qf(u)) = (pq)f(u)$,

  donc $p + q \in S$ et $pq \in S$.

  On a montré que $K \cup \{x\} \subseteq S \subseteq K[x]$ et que S est fermé sous l'addition et la multiplication de $K[x]$. Il s'ensuit que $S = K[x]$, donc $f(pu) = pf(u)$ pour tout $p \in K[x]$ et $u \in U$.

En vertu de (a) et (b), f est un homomorphisme de $K[x]$-modules.

Remarque : J'ai d'abord corrigé la question ci-dessus sur 10 points. Ensuite j'ai décidé que la question devrait valoir seulement 6 points, donc j'ai multiplié la note par (6/10).

Exemple : si vous aviez d'abord 7 sur 10 pour cette question, votre note sera finalement 4.2 sur 6.

(3) Soit I un idéal d'un anneau intègre A, et supposons que I n'est pas principal. Montrez que le A-module I n'est pas une somme directe de la forme

$$I = Au_1 \oplus \cdots \oplus Au_n \qquad \text{avec } u_1, \ldots, u_n \in I.$$

(6 pts) Par contradiction, supposons que $I = Au_1 \oplus \cdots \oplus Au_n$, avec $u_1, \ldots, u_n \in I$. Puisque I n'est pas principal, on a $n \geq 2$ et au moins deux des u_i sont non nuls ; quitte à ré-étiquetter $u_1, \ldots, u_n$, on peut supposer que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$. Puisque $u_1, u_2 \in A \setminus \{0\}$ et A est intègre, on a $u_1 u_2 \neq 0$. Donc

$$0 \neq u_1 u_2 \in Au_1 \cap Au_2 \subseteq Au_1 \cap (Au_2 + \cdots + Au_n)$$

et ceci implique que $Au_1, \cdots, Au_n$ sont dépendants—contradiction.

---

(4) Soit M un module de type fini sur un anneau euclidien A, et supposons que M a la propriété suivante :

Si $a \in A$ et $u \in M$ satisfont $au = 0$, alors $a = 0$ ou $u = 0$.

Montrez que M est un module libre. (Conseil : utilisez le théorème de structure.)

(6 pts) Si $M = \{0\}$ alors M est libre, donc on peut supposer à partir d'ici que $M \neq \{0\}$.

Le théorème de structure implique qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in M \setminus \{0\}$ satisfaisant

$$(*) \qquad M = Au_1 \oplus \cdots \oplus Au_n.$$

Comme $u_i \neq 0$ pour tout i, l'hypothèse sur M implique :

$$(**) \qquad \mathrm{Ann}(u_i) = \{0\} \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Les conditions $(*)$ et $(**)$ impliquent que la liste $(u_1, \ldots, u_n)$ est linéairement indépendante : en effet, si $a_1, \ldots, a_n \in A$ satisfont $\sum_i a_i u_i = 0$ alors $(*)$ implique $a_i u_i = 0$ pour tout i, et $(**)$ implique alors que $a_i = 0$ pour tout i.

Il s'ensuit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de M, donc M est libre.

---

(5) Considérez le sous-module N du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$ engendré par les trois éléments

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe une base (C_1, C_2) de $\mathbb{Z}^2$ et des éléments $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $d_1 \mid d_2$ et (d_1C_1, d_2C_2) est une base de N.

Trouvez d_1 et d_2.

(On ne vous demande pas de trouver C_1 et C_2, mais vous devez expliquer pourquoi les d_1, d_2 que vous donnez satisfont la condition demandée.)

Soit $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 10 & 9 & 18 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z})$.

Alors trouve que $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ est une forme normale de Smith de B.

(3 pts) Alors $d_1 = 1$ et $d_2 = 12$ sont les nombres cherchés.

(3 pts) Preuve que $d_1 = 1$ et $d_2 = 12$ satisfont la condition demandée. On répète un argument qu'on a vu en classe dans la preuve d'une proposition:

On a $\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B') = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Z}}$ et il est clair que la liste $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix})$ est linéairement indépendante. Donc $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B')$, donc

$$(e_1, 12e_2) \textit{ est une base de } \mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B')$$

où (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{Z}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En vertu d'une proposition vue en classe, le fait que $B \overset{\mathrm{op}}{\sim} B'$ implique qu'il existe un automorphisme $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ satisfaisant $\varphi\big(\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B')\big) = \mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B)$. Puisque $(e_1, 12e_2)$ est une base de $\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B')$, il s'ensuit que $(\varphi(e_1), \varphi(12e_2))$ est une base de $\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B)$. Comme $\mathrm{Col}_{\mathbb{Z}}(B) = N$ et $\varphi(12e_2) = 12\varphi(e_2)$, ceci donne :

$$(*) \qquad (\varphi(e_1), 12\varphi(e_2)) \text{ est une base de } N.$$

Puisque $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est un automorphisme et (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{Z}^2$, il s'ensuit que

$$(**) \qquad (\varphi(e_1), \varphi(e_2)) \text{ est une base de } \mathbb{Z}^2.$$

En vertu de $(*)$ et $(**)$, $d_1 = 1$ et $d_2 = 12$ sont les nombres cherchés.
