Nom de famille (MAJUSCULES) ____________________________

Prénom (MAJUSCULES) ____________________________

Signature ____________________________

Numéro d'étudiant ____________________________

Mat 3541 Test 1

Professeur: D. Daigle Date: 7 octobre 2011 Durée: 75 minutes

Espace réservé au correcteur.

(1) Soit $T : V \to W$ une application linéaire, où V, W sont des espaces vectoriels sur un corps K. Supposons que $\dim V = n$ et $\dim W = m$.

Soient $\mathcal{B}$ une base de V, $\mathcal{D}$ une base de W, et $A = \big[T\big]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$.

Soit $T_A : K^n \to K^m$ l'application linéaire déterminée par la matrice $A = \big[T\big]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$, c'est à dire que T_A est définie par

$$T_A(X) = AX \text{ pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

(a) Montrez que, quel que soit $v \in V$, $\;v \in \ker(T) \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \ker(T_A)$.

(b) Montrez que, quel que soit $w \in W$, $\;w \in \operatorname{im}(T) \Leftrightarrow [w]_{\mathcal{D}} \in \operatorname{im}(T_A)$.

(2) Soit V un espace vectoriel sur un corps K, et soit $T \in \mathrm{End}_K(V)$. On sait que le noyau $\ker(T)$ et l'image $\mathrm{im}(T)$ de T sont des sous-espaces de V. Supposons que

$$T^2 = T.$$

(a) Montrez que $V = \ker(T) \oplus \mathrm{im}(T)$.

(b) Montrez que les sous-espaces $\ker(T)$ et $\mathrm{im}(T)$ de V sont T-invariants.

(c) Donnez une description complète des opérateurs linéaires

$$T|_{\ker T} : \ker(T) \to \ker(T) \quad \text{et} \quad T|_{\mathrm{im}\, T} : \mathrm{im}(T) \to \mathrm{im}(T).$$

(d) Supposons que $(e_1, \ldots, e_s)$ est une base de $\ker(T)$ et que $(e_{s+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{im}(T)$. Alors on sait que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V. Donnez la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$.

(3) (a) Montrez que si $\Phi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux et A est commutatif alors $\Phi(A)$ est un anneau commutatif. (On sait déjà que $\Phi(A)$ est un anneau, puisque c'est un sous-anneau de B ; vous devez montrer la commutativité. On ne suppose pas que B est commutatif.)

(b) Soit V un espace vectoriel sur un corps K et soit $T \in \mathrm{End}_K(V)$. Soient $p, q \in K[x]$ et considérez les éléments $p(T)$ et $q(T)$ de $\mathrm{End}_K(V)$. Montrez que $p(T) \circ q(T) = q(T) \circ p(T)$. *Indice :* Servez-vous de (a) et d'une proposition vue en classe.

(4) Soit V un espace vectoriel sur un corps K.

(a) Soient $L, M \in \mathrm{End}_K(V)$ tels que $L \circ M = M \circ L$. Montrez que le sous-espace $\mathrm{im}(L)$ de V est M-invariant.

(b) Montrez que pour tout choix de $T \in \mathrm{End}_K(V)$ et de $p, q \in K[x]$, le sous-espace $\mathrm{im}\big(p(T)\big)$ de V est $q(T)$-invariant.

(5) Considérez l'idéal $I = (2, x)$ de l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Soit $q = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ (où $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i, et où il n'y a qu'un nombre fini de a_i non nuls). Montrez que si $q \in I$, alors $a_0 \in 2\mathbb{Z}$.
Déduisez que $I \neq \mathbb{Z}[x]$.

(b) Montrez que si $p \in \mathbb{Z}[x]$ est tel que $I \subseteq (p)$, alors $p \in \{-1, 1\}$.
Déduisez que $(p) = \mathbb{Z}[x]$.

(c) Déduisez de (a) et (b) que I n'est pas un idéal principal de $\mathbb{Z}[x]$.