Nom de famille (MAJUSCULES): ______________________________

Prénom: ____________________ No d'étudiant: ______________

Signature: ______________________________

Mat 3541 Examen final

Professeur: D. Daigle — décembre 2011 — Durée: 3 heures

- NON PERMIS: notes de cours, manuels, calculatrices ou tout autre appareil électronique.
- Vous pouvez utiliser le verso des pages comme papier brouillon, ou pour répondre aux questions si vous manquez d'espace.
- Pour chaque question, **donnez une solution complète et justifiez vos affirmations.**

(1) Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2x+7y \end{pmatrix}$. On considère deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$: soit $\langle \_\,, \_ \rangle_1$ le produit scalaire standard, et soit $\langle \_\,, \_ \rangle_2$ le produit scalaire défini par

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle_2 = xx' + xy' + yx' + 2yy'.$$

(a) (2 pts) Vérifiez que $\langle \_\,, \_ \rangle_2$ est un produit scalaire.

(b) (1 pt) Montrez que $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base orthonormale de $\big(\mathbb{R}^2, \langle \_\,, \_ \rangle_2\big)$.

(c) (2 pts) T, considéré comme opérateur de l'espace préhilbertien $\big(\mathbb{R}^2, \langle \_\,, \_ \rangle_1\big)$, est-il self-adjoint ? Est-il normal ?

(d) (2 pts) T, considéré comme opérateur de l'espace préhilbertien $\big(\mathbb{R}^2, \langle \_\,, \_ \rangle_2\big)$, est-il self-adjoint ? Est-il normal ?

(2) Soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et considérons $V = \mathbb{F}^2$ muni du produit scalaire standard. Soient $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ définies par $S(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$ et $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$.
Utilisez les théorèmes spectraux pour répondre aux questions suivantes.

(a) (1 pt) Supposons que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; existe-t-il une base orthonormale $\mathcal{B}$ de V telle que $[S]_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale ?

(b) (2 pts) Supposons que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; existe-t-il une base orthonormale $\mathcal{B}$ de V telle que $[S]_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale ?

(c) (2 pts) Supposons que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; existe-t-il une base orthonormale $\mathcal{B}$ de V telle que $[T]_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale ?

(3) (4 pts) Considérez le sous-ensemble S de $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ défini par :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

Trouvez trois éléments $A_1, A_2, A_3 \in S$ qui satisfont :

Chaque élément de S est semblable à une des matrices A_1, A_2, A_3.

(4) (5 pts) Trouvez une forme canonique de Jordan de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(5) **Définition.** Soit M un module sur un anneau commutatif A. On dit que M est un *module simple* si $M \neq \{0\}$ et si $\{0\}$ et M sont les seuls sous-modules de M.

(a) (2 pts) Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme donné par $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, et considérez la structure de $\mathbb{R}[x]$-module sur $\mathbb{R}^2$ correspondant à T. Montrez que le $\mathbb{R}[x]$-module $\mathbb{R}^2$ est simple.

Pour les questions (b), (c), (d), soit $V \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, soit $T \in \mathrm{End}_K(V)$ et considérez la structure de $K[x]$-module sur V déterminée par T. Soit aussi $m(x) \in K[x]$ le polynôme minimal de T.

(b) (3 pts) Supposons que $m(x) = f(x)g(x)$ où $f(x), g(x) \in K[x]$ sont des polynômes tels que $\deg f(x) > 0$ et $\deg g(x) > 0$. Montrez qu'au moins un des endomorphismes $f(T)$, $g(T)$ est non-injectif. Montrez que si $f(T)$ est non-injectif, alors $U = \ker f(T)$ est un sous-espace T-invariant qui satisfait $U \neq \{0\}$ et $U \neq V$.

(c) (2 pts) Utilisez (b) pour montrer que si le $K[x]$-module V est simple, alors $m(x)$ est un élément irréductible de $K[x]$.

(d) (2 pts) Donnez un exemple qui montre que si $m(x)$ est un élément irréductible de $K[x]$, alors le $K[x]$-module V n'est pas nécessairement simple.

(6) Puisque $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe abélien, on peut considérer le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$. Rappelons que la structure de module sur $\mathbb{Q}$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ (n, x) & \mapsto & nx \end{array}$$

où $x + y$ est l'addition de $\mathbb{Q}$, et nx est la multiplication de $\mathbb{Q}$.

(a) (3 pts) Soit $q \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ et soit $\mathbb{Z}q$ le sous-module de $\mathbb{Q}$ engendré par q. Donnez un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}q$ (définissez φ et vérifiez que c'est un isomorphisme).

(b) (3 pts) Montrez que, quels que soient les sous-modules non nuls $M \neq \{0\}$ et $N \neq \{0\}$ de $\mathbb{Q}$, on a $M \cap N \neq \{0\}$.

(c) (2 pts) Soit $P \neq \{0\}$ un sous-module de $\mathbb{Q}$, et supposons que P est de type fini. En vertu du Théorème de structure, on sait qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in P \setminus \{0\}$ tels que $P = \mathbb{Z}u_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}u_n$. Utilisez (b) pour montrer que $n = 1$.

(d) (2 pts) Utilisez (a) et (c) pour montrer que si P est un sous-module de $\mathbb{Q}$ qui est non nul et de type fini, alors P est isomorphe à $\mathbb{Z}$.