uOttawa

Department of Mathematics
and Statistics

Département de mathématiques
et statistique

Analyse III — Mat 3520

Examen final — 21 décembre 2009

Professeur : Vladimir Pestov

Durée : 3 h.
Essayer toutes les trois questions.
Chaque question est corrigée sur 16 notes.
La note pour l'examen sera calculée sur 45 notes.
À l'intérieur de chaque question, les sous-questions devient généralement de plus en plus dures.
Prenez soin de bien rédiger vos solutions.
Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre.

(1) Rappelons qu'une fonction $f\colon X \to Y$ entre deux espaces métriques est *lipschitzienne du rapport* L si, quels que soient $x, y \in X$, on a $d_Y(fx, fy) \leq L \cdot d_X(x, y)$.

(a) Soit X un espace métrique. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes, ainsi que le produit d'une fonction lipschitzienne par un scalaire,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

sont lipschitziennes. **[4 notes]**

(b) Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes n'est pas toujours une fonction lipschitzienne, en donnant un exemple. Expliquer. (*Suggestion :* regarder la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans soi-même.) **[3 notes]**

(c) Soit $f\colon X \to Y$ une fonction lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des tous les rapports de f possède le plus petit élément. **[3 notes]**

(d) Soit X un espace métrique dont l'ensemble de points est fini. Montrer que, quel que soit un espace métrique Y, toute application de X dans Y est forcément lipschitzienne. **[3 notes]**

(e) Soit X un espace métrique dont l'ensemble des points est infini. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas lipschitzienne. **[3 notes]**

[À continuer à la page suivante....]

(2) (a) Donner une définition d'un espace métrique connexe par arcs. **[2 notes]**

(b) Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Supposons que X est connexe par arcs. Montrer que l'image $f(X)$ est connexe par arcs. **[3 notes]**

(c) Soit E un espace normé quelconque, de dimension $\dim E \geq 2$. Montrer que le sous-espace $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. **[4 notes]**

(d) Donner la définition d'un espace métrique compact. **[1 note]**

(e) Formuler les théorèmes de Weierstrass concernant les fonctions continues réelles sur un espace métrique compact. **[2 notes]**

(f) Soient f, g deux fonctions lipschitziennes réelles sur un espace métrique compact X. Montrer que le produit fg est une fonction lipschitzienne. **[4 notes]**

[À continuer à la page suivante....]

(3) (a) Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Donner la définition d'une norme sur E. **[2 notes]**

(b) Soit X un espace métrique. Notons $\mathrm{Lip}\,(X)$ la famille de toutes les fonctions lipschitziennes $f\colon X \to \mathbb{R}$, munie de l'addition et de la multiplication scalaire comme dans l'équation (1). D'accord comme le problème (1a), $\mathrm{Lip}\,(X)$ est un espace vectoriel réel. Pour une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ notons $L(f)$ le plus petit rapport de f (qui existe grâce au problème (1c)).

Montrer que la fonctionnelle $L\colon \mathrm{Lip}\,(X) \to \mathbb{R}$ n'est pas une norme sur $\mathrm{Lip}\,(X)$. Expliquer pourquoi. **[2 notes]**

(c) Soient X un espace métrique et $x_0 \in X$ un point quelconque. Notons $\mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Lip}\,(X)$ qui consiste de toutes les fonctions lipschitziennes réelles f sur X qui s'annulent à x_0.

Montrer que la restriction de l'application L sur $\mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ est une norme. **[4 notes]**

(d) Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre deux espaces normés. Qu'est-ce que cela veut dire que f est bornée ? Donner la définition de la norme de f. **[2 notes]**

(e) Soient X un espace métrique et $x_0, x \in X$ deux points donnés. Définissons une application linéaire $\delta = \delta_x$ de $\mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour toute fonction $f \in \mathrm{Lip}\,(X, x_0)$,

$$\delta(f) = f(x).$$

Montrer que la forme linéaire δ est bornée, et calculer sa norme, $\|\,\delta\,\|$. **[3 notes]**

(f) Soit $X = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle induite de $\mathbb{R}$. Posons $x_0 = 0$. Alors chaque fonction $f \in \mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ est uniquement determinée par ses valeurs aux points 1 et 2, donc l'espace vectoriel $\mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ peut être identifié avec le plan $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\mathrm{Lip}\,(X, x_0) \ni f \mapsto i(f) = (f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2.$$

Dessiner la boule unitaire fermée de l'espace normé $\mathrm{Lip}\,(X, x_0)$ sous l'identification par-dessus. **[3 notes]**

[Fin des questions]