



uOttawa

Department of Mathematics
and Statistics
Département de mathématiques
et statistique

Analyse III— Mat 3520

Examen de mi-session — 16 octobre 2007

Professeur : Vladimir Pestov

Durée : 1 h 20 m.

Prenez soin de bien rédiger vos solutions.

Les questions seront corrigées sur 25 notes.

Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre.

- (1) (a) Donner la définition
- (i) d'un sous-ensemble ouvert d'un espace métrique ; **[1 note]**
 - (ii) d'un sous-ensemble fermé. **[1 note]**
- (b) Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique. Pour tout $\epsilon > 0$, définissons l'ensemble
- $$A_\epsilon = \cup_{a \in A} B_\epsilon(a)$$
- (appelé ϵ -voisinage de A). Montrer que l'ensemble A_ϵ est ouvert, en citant tous les résultats de cours que vous utilisez. **[3 notes]**
- (c) Soit F un sous-ensemble fermé d'un espace métrique X . Montrer que
- $$F = \cap_{n=1}^{\infty} F_{1/n},$$
- où $F_{1/n}$ est le $1/n$ -voisinage de F . **[4 notes]**
- (d) Donner la définition d'un sous-ensemble du type G_δ d'un espace métrique. **[1 note]**
- (e) Dédurre que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique est du type G_δ . **[1 note]**
- (f) Est-ce que tout sous-ensemble du type G_δ d'un espace métrique X est fermé dans X ? Expliquer. **[1 note]**

[À continuer à la page suivante....]

(2) (a) Donner la définition d'une application continue entre deux espaces métriques. **[1 note]**

(b) Soit $f, g: X \rightarrow Y$ deux applications continues quelconques entre deux espaces métriques. Montrer que l'ensemble

$$F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

est fermé dans X .

[4 notes]

(3) (a) Donner la définition d'un espace métrique connexe. **[1 note]**

(b) Un espace métrique $X = (X, d)$ est dit *ultramétrique* si sa fonction de distance, d , vérifie la condition suivante :

$$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

Montrer que dans un espace ultramétrique toute boule ouverte est un ensemble fermé. **[4 notes]**

(c) Montrer que aucun espace ultramétrique possédant plusieurs points n'est connexe. **[3 notes]**

[Fin des questions]