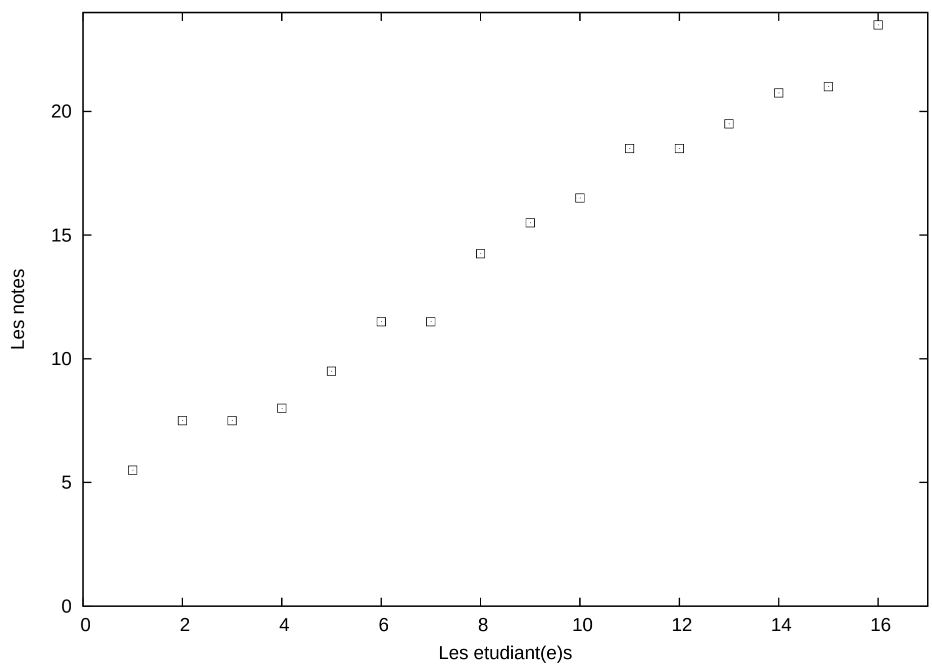
Analyse III – Mat 3520

Solutionnaire à l'examen de mi-session



Distribution des résultats de l'examen partiel de mi-session.

La note moyenne : 14.3 (sur 25).

1,(b). On a montré dans le cours que toute boule ouverte $B_\epsilon(a)$ est un ensemble ouvert, et que la réunion d'une famille quelconque des ensembles ouverts est ouvert. Par conséquent, l'ensemble en question,

$$A_\epsilon = \cup_{a\in A} B_\epsilon(a)$$

est ouvert en tant que la réunion d'une famille des boules ouvertes. $\square$

1,(c). L'inclusion

$$F \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$$

est bien évidente. Montrons l'autre sens :

$$F \supseteq \cap_{n=1}^{\infty} F_{1/n}.$$

Soit $x \notin F$. Comme F est fermé, son complémentaire F^c est ouvert, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(x) \cap F = \emptyset$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n tel que

$$n > \frac{1}{\epsilon}, \text{ c.à.d. } \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Quel que soit $a \in F$, on a

$$d(x,a) \geq \epsilon > \frac{1}{n},$$

ce qui veut dire

$$x \notin F_{1/n}.$$

On en conclut :

$$x \notin F \Rightarrow \exists n,\ x \notin F_{1/n}.$$

Autrement dit,

$$x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_{1/n} \Rightarrow x \in F.$$

$\square$

1,(e). Soit F un fermé. Alors

$$F = \cap_{n=1}^{\infty} F_{1/n},$$

l'intersection d'une famille dénombrable des sous-ensembles ouverts. On en conclut : F est un G_δ. $\square$

1,(f). Non. Chaque ensemble ouvert est un G_δ, et au même temps pas tout ensemble ouvert est fermé. Un exemple est donné par tout intervalle ouvert comme $(0,1)$ dans $\mathbb{R}$, qui n'est pas fermé en dépit d'être un G_δ. $\square$

2,(b). On va montrer que le complémentaire F^c est ouvert. Soit $x \in F^c$. Cela veut dire que

$$f(x) \neq g(x).$$

Notons

$$\epsilon = d_Y(f(x), g(x)).$$

Comme f et g sont continues, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que

$$\forall y \in X,\ \ d_X(x,y) < \delta_1 \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2},$$

et

$$\forall y \in X,\ \ d_X(x,y) < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(y)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. On a

$$\forall y \in X,\ \ d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } d_Y(g(x), g(y)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $a \in B_\delta(x)$. Alors $d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon/2$ et $d_Y(g(a), f(x)) < \epsilon/2$. Si on suppose que $f(a) = g(a)$, on a, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\begin{array}{rcl} d_Y(f(x), g(x)) & = & d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(f(a), g(x)) \\ & = & d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(g(a), g(x)) \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} \\ & = & \epsilon, \end{array}$$

une contradiction parce que $d_Y(f(x), f(y)) = \epsilon$. On en conclut : pour tout $a \in B_\delta(x)$,

$$f(a) \neq g(a),$$

c.à.d.,

$$a \notin F,$$

ou, en d'autres mots,

$$B_\delta(x) \subseteq F^c.$$

Cela veut dire que le complémentaire F^c est ouvert. $\square$

3,(b). On va montrer ici que le complémentaire $B_\epsilon(x)^c$ de la boule ouverte $B_\epsilon(x)$ est ouverte. Soit $y \in B_\epsilon(x)^c$. Alors $d(x, y) \geq \epsilon$. Montrons que

$$B_\epsilon(y) \subseteq B_\epsilon(x)^c. \tag{0.1}$$

Supposons qu'il existe $z \in B_\epsilon(y) \cap B_\epsilon(x)$¿ On a donc

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, a), d(z, y)\} < \epsilon,$$

parce que $d(z, y) < \epsilon$. C'est une contradiction, qui nous montre que

$$B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset.$$

On en déduit : $B_\epsilon(x)^c$ est ouvert, donc $B_\epsilon(x)$ est fermé. $\square$

3,(c). Soit X un espace ultramétrique possedant plusieurs points, c.à.d. le cardinal de X est plus grand ou égal à 2.

Choisissons $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $d(x, y) > 0$. Posons $\epsilon = d(x, y)$.

La boule ouverte $B_\epsilon(x)$ est à la fois ouverte et fermée, elle contient x mais ne contient pas y. Par conséquent, $B_\epsilon(x)$ est un sous-ensemble propre, non-vide, à la fois ouvert et fermé, ce qui veut dire que X n'est pas connexe. $\square$