uOttawa

Department of Mathematics
and Statistics

Département de mathématiques
et statistique

Analyse III — Mat 3520

Examen final — 7 décembre 2007

Professeur : Vladimir Pestov

Durée : 3 h.

Essayer toutes les trois questions.

Chaque question est corrigée sur 16 notes.

À l'intérieur de chaque question, les sous-questions devient généralement de plus en plus dures même là où elles valent moins des notes.

Prenez soin de bien rédiger vos solutions.

Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre.

(1) (a) Soit (X,d) un espace métrique. Donner la définition

(i) d'une suite convergente dans X ; **[1 note]**

(ii) d'une suite de Cauchy dans X. **[1 note]**

(b) Donner la définition d'un espace métrique compact. **[2 notes]**

(c) Soit K un espace métrique compact. En utlisant les résultats du cours, montrer que toute fonction continue réelle sur K est bornée. **[2 notes]**

(d) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique X. Montrer que pour tout $x \in X$ la suite $d(x,x_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. **[2 notes]**

(e) Notons par $g(x)$ la limite de la suite comme dans le problème (1d). Supposons que la suite (x_n) n'est pas convergente. Montrer que

(i) Pour tout $x \in X$, on a $g(x) \neq 0$. **[2 notes]**

(ii) l'application $x \mapsto g^{-1}(x)$ de X dans $\mathbb{R}$, définie ci-dessus, n'est pas bornée. **[2 notes]**

(iii) l'application $x \mapsto g^{-1}(x)$ est continue. **[2 notes]**

(f) Soit X un espace métrique quelconque possedant la propriété suivante : toute fonction continue réelle sur X est bornée. Montrer que X est compact. (Vous pouvez utiliser les résultats du cours en les citant clairement.) **[2 notes]**

[À continuer à la page suivante....]

(2) (a) Donner la définition d'un espace normé réel. **[2 notes]**

(b) Expliquer comment chaque espace normé devient un espace métrique. **[2 notes]**

(c) Donner la définition d'un espace de Banach. **[2 notes]**

(d) Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes dans un espace normé E quelconque. Montrer que la suite $(x_n + y_n)$ est convergente. **[2 notes]**

(e) Rappellons qu'un sous-ensemble V d'un espace vectoriel E est dit *convexe* si pour tout réel t et pour tous $x, y \in V$ on a $tx + (1-t)y \in V$. Soient E un espace normé et V un sous-ensemble convexe de E. Montrer que l'adhérence de V dans E est convexe. **[2 notes]**

(f) Soient E un espace normé et F un sous-espace vectoriel propre de E (c.à.d. $F \neq E$). Montrer que l'intérieur de F dans E est vide. **[2 notes]**

(g) Formuler le théorème de Baire. **[2 notes]**

(h) Soit E un espace de Banach dont la dimension (en tant qu'espace vectoriel) est infinie. Déduire que la dimension de E n'est pas dénombrable. **[2 notes]**

[À continuer à la page suivante....]

(3) (a) Donner la définition d'une application linéaire bornée f entre deux espaces normés. **[2 notes]**

(b) Donner la défnition de la norme, $\| f \|$, d'une application f comme ci-dessus. **[2 notes]**

(c) Montrer que toute application linéaire bornée est lipschitzienne. Quelle est son rapport ? Expliquer. **[2 notes]**

(d) Soit E un espace normé. Un sous-ensemble X de E est dit *total* si la seule forme linéaire bornée f sur E qui s'annule à tous les points de X est la forme nulle. Montrer que les sous-ensembles suivants d'un espace normé E sont totaux :

(i) La boule ouverte $B_1(0)$ de E ; **[2 notes]**

(ii) une base X de E en tant que espace vectoriel. **[2 notes]**

(e) Montrer que tout sous-ensemble dense de E est total. **[2 notes]**

(f) Formuler le théorème de prolongement de Hahn–Banach. **[2 notes]**

(g) Soit E un espace normé. Supposons qu'il existe un sous-ensemble total et dénombrable X de E. Montrer que E est séparable. **[2 notes]**
(*Remarque :* si votre dénomstration n'utilise pas le théorème de Hahn–Banach, elle est de toute évidence fausse.)

[Fin des questions]