(1) (a) L'argument se réduit à $p_1 \wedge p_2 \to q$.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \hline q \end{array}$$

Puisque $p_1 \wedge p_2 \to p_1 \vee p_2$ est une tautologie, on en déduit que $p_1 \wedge p_2$ est une contradiction.

Par conséquent, l'argument devient logiquement équivalent à $\bot \to \bot$.

C'est valide. $\boxed{\text{Oui}}$, $\boxed{\text{Vrai}}$

(b) Choisissons x_0 tel que $\forall y\, P(x_0,y)$. Alors, quel que soit y, on a $P(x_0,y)$. Cela veut dire que $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (il suffit de poser $x = x_0$). $\boxed{\text{Vrai}}$

(c) $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} = \emptyset$ puisque si $x \in A$, alors $x \in B$.

$\boxed{\text{Vrai}}$

(d) Oui, n'importe quel ensemble A possède cette propriété : l'axiome de fondation nous interdit d'avoir les ensembles A avec $A \in A$.

$\boxed{\text{Vrai}}$

(e) Oui, en effet. Par exemple, posons : $\boxed{\text{Vrai}}$

$A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, ~~[illegible]~~ et $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(f) Faux ! Par exemple, $A = B = U = [0,1]$, alors $A \cap B = \emptyset$, $(A \cap B)^c = U = [0,1]$,

mais $A^c \cap B^c = \cancel{[0,1]}\ \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. $\boxed{\text{Faux}}$

Et bien sûr $[0,1] \notin \emptyset$.

(g) Oui. $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \equiv P \leftrightarrow Q$, et

$P \leftrightarrow Q$ est une tautologie s.s.i. $P \equiv Q$.

$\boxed{\text{Vrai}}$

2

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ n > x$. $\boxed{\text{Vrai}}$

Oui ; étant donné un x, posons $n = x+1$, ça marche : $n > x$.

(b) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \leq x$. $\boxed{\text{Faux}}$

Cela nous dit qu'il existe un élément maximal dans $\mathbb{N}$, ~~ce qui~~ une borne supérieur, ce qui n'est pas le cas. Par exemple, quel que soit x, l'élément $n = x+1$ ne vérifie pas $(n \leq x)$.

(c) $\exists a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}\ (a = 2 \rightarrow b = 3)$ $\boxed{\text{Vrai}}$

Oui, il suffit de ~~poser~~ choisir $a \neq 2$, par exemple, posons $a = 0$. Alors, $(a = 2)$ est une contradiction, donc $(a=2) \rightarrow (b=3)$ est toujours vrai, une tautologie quel que soit b.

(d) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \ (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{Q}\ (xy = 1))$. $\boxed{\text{Vrai}}$

Oui, il s'agit de l'inverse multiplicatif, $y = x^{-1}$, qui existe puisque $x \neq 0$.

(e) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in \mathbb{R}\ \ x^2 = a$ $\boxed{\text{Faux}}$

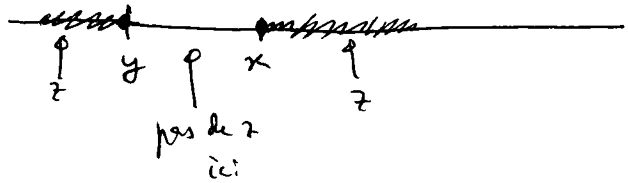
"Chaque réel possède une racine carrée réelle". Faux : considerons le cas $a = -1$, alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$, d'où $x^2 \neq -1$.

(f) $\forall a \in \mathbb{N}\ \ \forall b \in \mathbb{N}\ \ \exists c \in \mathbb{N}\ \ (a+b+c \text{ est impair})$ $\boxed{\text{Vrai}}$

"Donné deux entiers positifs, a et b, il existe un entier positif, c, tel que $a+b+c$ est impair". Vrai. Il suffit de poser, par exemple :

$$c = \begin{cases} 0, & \text{si } a+b \text{ est impair,} \\ 1, & \text{si } a+b \text{ est pair.} \end{cases}$$

(3) $\phi : \forall x \in A \; \exists y \in A \; (x > y \wedge \forall z \in A \; (z \geq x \vee z \leq y)).$



La formule nous dit : chaque x dans le domaine possède un <u>prédécesseur</u>, y : un élément tel que $y < x$ et il n'y a pas d'éléments strictement entre y et x.

La formule est vrai dans $\mathbb{Z}$: on pose $y = x - 1$.

Elle est fausse dans $\mathbb{N}$ ($x = 0$ n'a pas de prédécesseur), dans $\mathbb{Q}$ (dont l'ordre est <u>dense</u> : si $y < x$, il y a un élément strictement entre eux, par exemple, $z = \frac{y+x}{2}$), et aussi dans $\mathbb{R}$ (pour la même exacte raison que dans $\mathbb{Q}$).

a) Non, F

b) Oui, V

c) Non, F

d) Non, F

4

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$\neg(\neg p \to q)$	$\overbrace{\neg(\neg p \to q) \to p}^{a}$	$q \vee p$	$\overbrace{\neg p \to (q \vee p)}^{b}$	la formule entière $a \leftrightarrow b$
V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V

D'où notre formule est une tautologie.

5

Supposons que $A \cap B = A$.

Afin de montrer que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, soit $C \in \mathcal{P}(A)$ quelconque. La preuve sera terminée quand nous montrerons que $C \in \mathcal{P}(B)$. L'hypothèse $C \in \mathcal{P}(A)$ signifie que $C \subseteq A$ (d'après la définition de l'ensemble des parties, $\mathcal{P}(A)$). Puisque $A = A \cap B$, on en conclut :

$$C \subseteq A \cap B.$$

Cela implique que $C \subseteq B$. Pour le vérifier, soit $x \in C$. Alors, $x \in A \cap B$, ce qui signifie $x \in A$ et $x \in B$, selon la définition de l'intersection des deux ensembles. Donc,

$$\forall x \in C, \quad x \in B,$$

et on en conclut : $C \subseteq B$. Mais c'est la même chose que $C \in \mathcal{P}(B)$. $\square$

(6) $\phi : \forall x \, \exists y \, (P(x,y) \wedge \forall z \, (P(x,z) \to (P(y,z) \vee z = y)))$

$\neg\phi \equiv \neg(\forall x \, \exists y \, (P(x,y) \wedge \forall z \, (P(x,z) \to (P(y,z) \vee z = y)))$

$\equiv \exists x \, \forall y \, \neg(P(x,y) \wedge \forall z \, (P(x,z) \to (P(y,z) \vee z = y)))$

le connecteur principal

$\equiv \exists x \, \forall y \, \neg P(x,y) \vee \neg(\forall z \, (P(x,z) \to (P(y,z) \vee z = y)))$

$\equiv \exists x \, \forall y \, \neg P(x,y) \vee \exists z \, \neg(P(x,z) \to (P(y,z) \vee z = y))$

$\equiv \exists x \, \forall y \, \neg P(x,y) \vee \exists z \, (P(x,z) \wedge \neg(P(y,z) \vee z = y))$

$\equiv \exists x \, \forall y \, \neg P(x,y) \vee (\exists z \, P(x,z) \wedge (\neg P(y,z) \wedge z \neq y))$

$\equiv \underline{\exists x \, \forall y \, \neg P(x,y) \vee \exists z \, P(x,z) \wedge \neg P(y,z) \wedge z \neq y}$.

---

(7) (a) $\exists x \, \exists y \, A(x,j) \wedge \neg A(y,j)$

Curieusement, cela équivaut à : $\exists x \, \exists y \, \neg(A(x,j) \to A(y,j))$.

(b) $\forall x \, \neg A(x,m) \to \neg(A(x,x))$

ou bien : $\forall x \, A(x,m) \vee \neg(A(x,x))$

ou : $\forall x \, A(x,x) \to A(x,m)$.

(c) $\exists x \, \exists y \, A(x,y) \wedge \forall z \, \neg(A(z,x))$

ou : $\exists x \, \exists y \, \forall z \, A(x,y) \wedge \neg A(z,x)$

ou : $\exists x \, \exists y \, \forall z \, \neg(A(x,y) \to A(z,x))$

<u>Correction :</u>
5 points pour 3 réponses correctes ; chaque réponse fausse vaut −2 points. (le problème est trop facile quand même).

Bonus (3 points)

Le prédicat : $B(x)$ "x boit"

(a) $\exists x \left(B(x) \rightarrow \forall y \; B(y) \right)$ (1 point)

(b) S'il y a une personne qui ne boit pas, choisissons-la comme x_0. Puisque $B(x_0)$ est faux, l'implication

$$B(x_0) \longrightarrow \ldots$$

est valide.

Si une telle personne n'existe pas, alors, tout le monde boit: $\forall y \; B(y)$. Comme le bar n'est pas vide d'après l'hypothèse, choisissons comme x_0 n'importe qui. Alors, $B(x_0)$ est vrai, ainsi que $\forall y \; B(y)$, donc l'implication

$$B(x_0) \longrightarrow \forall y \; B(y)$$

est valide, d'où

$$\exists x \; B(x) \rightarrow \forall y \; B(y)$$

est toujours valide, donc une tautologie.

(2 points pour la démonstration complète)
Pas des notes partielles pour (b).
