F
F
V
F
F
V
F
V
V/F
F

1 [1 point par problème, pas des notes partielles]

(sur 10)

(a) Faux. Le contre-exemple : $\mathbb{R}$ comme le domaine,
$x = 0$ comme $P(x)$,
$x \neq x$ comme $Q(x)$.

(b) Faux. L'argument $\dfrac{\top}{\bot}$ n'est pas valide.

(c) Vrai, puisque ~~A~~ B n'est pas vide : $\forall a \in A \ \exists b \in B \ (a,b) \in R$.
(Prenons b quelconque).

(d) Faux. Par exemple, si $A = \{x\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}\}$, et
puisque $x \notin \mathcal{P}(A)$, on a $\{x\} \not\subseteq \mathcal{P}(A)$.

(e) Faux : les images de f sont toujours ~~des~~ des entiers impaires.

(f) Vrai. L'inverse de f est la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

(g) Faux : en supposant que $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \le \aleph_0$, on en déduit
$|\mathbb{R}| \le |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| + |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

(h) Vrai. On a : $f = (f^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$.

(i) Vrai par rapport au <u>bon ordre</u>,
Faux par rapport à l'ordre <u>usuel</u>.
} Donc, la question a été mal posée par nous, et tout le monde va gagner 1 point ici, peu importe la réponse.

(j) Faux : par exemple, $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$.

[10 points]

2

1 point pour chaque réponse correcte ($\frac{1}{2}$ point pour une idée correcte mal implementée), + 1 point pour une explanation brève.

(a) $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, c.à.d., $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1$, ...
Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(2n) = n$, donc f est surjective ; au même temps, $f(0) = 0 = f(1)$, donc f n'est pas injective.

(b) $f(x) = e^x$ est injective : $(e^x = e^y) \Rightarrow (\log e^x = \ln e^y) \Rightarrow (x = y)$.
Mais f n'est pas surjective : son image consiste des nombres positifs.

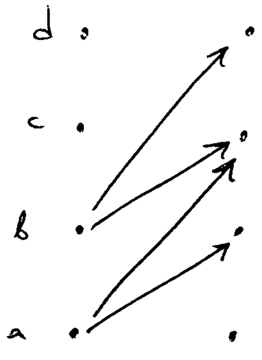
(c) Par exemple, la relation d'ordre large usuel induit de $\mathbb{R}$:
$R = \{ (x,y) \in \{0,1,2\}^2 : x \leq y \}$.
Elle est réflexive, transitive, mais pas univaluée : $0 \leq 1$ et $0 \leq 2$....

(d) Une relation d'équivalence, $\sim$, ayant précisément 2 classes d'équivalence avec 2 éléments dans chacun d'eux est telle.
Par exemple, sur $\{0,1,2,3\}$ la relation de congruence mod 2 :
$0 \sim 2$, $1 \sim 3$. Les systèmes de représentants possibles sont quatre :
$\{0,1\}$, $\{0,3\}$, $\{2,1\}$, $\{2,3\}$.

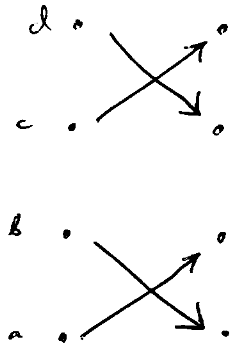
(e) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, posons $n \prec m$ s.s.i. $n \geq m$ au sens de l'ordre usuel. On a :
$$0 \succ 1 \succ 2 \succ 3 \succ \dots \succ 10^{10^{10}} \succ \dots,$$
donc il n'y a pas d'éléments minimaux : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \precneqq n$.

3

(3) (a)



R



S

[6 points]

$\frac{1}{2}$ point pour chaque
(a) réponse correct dans le tableau ;
(b) 2 points pour la réponse correct,
$-\frac{1}{2}$ pt pour chaque élément manquant ou superflu.

R n'est pas symétrique : $aRb \wedge \neg bRa$,
n'est pas transitive : $aRb \wedge bRd \wedge \neg aRd$
n'est pas univaluée : $aRb \wedge aRc$
n'est pas totale : $\neg(\exists x \ \ cRx)$.

S est symétrique, pas transitive : $cRd \wedge dRc \wedge \neg cRc$,
univaluée, et totale.

	Sym.	Trans.	Univ.	Totale
R	N	N	N	N
S	Oui	N	Oui	Oui

(b) S $\quad R^{-1} \quad R^{-1}\circ S \quad (R^{-1}\circ S)^{-1} = \{(a,a),(a,d),(b,c),(b,d)\}$.

4

a $\left(\forall x \;\; L(x, E)\right) \lor \left(\neg L(E, E)\right)$

ou bien :

$$L(E, E) \longrightarrow \left(\forall x \;\; L(x, E)\right).$$

b $\forall x \;\; \left(\neg L(x, E)\right) \longrightarrow N(x).$

c $\exists x \;\; \forall y \;\; \left(L(x, y) \longrightarrow \neg N(y)\right)$

6 points = 2 pt × 3.

– 1 pt pour un quantificateur mal géré,

– $\frac{1}{2}$ pt pour une erreur mineure (t.q. des parenthèses manquantes, par exemple).

5

(a) La suite $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ est croissante, et converge vers 1. De même, la suite $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ est decroissante et converge vers 1.

Cela veut dire que la suite des intervalles $\left(\frac{n}{n+1}, 1+\frac{1}{n+1}\right)$ est decroissante, avec chaque intervalle contenu dans l'intervalle précédent. La réunion de tous les intervalles est l'intervalle correspondant à $n=0$, le plus grand de tous :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}, 1+\frac{1}{n+1}\right) = (0,2).$$

Je vais accepter des explications intuitives, experimentales en quelque sens, si vous calculez 2 ou 3 premiers itérants pour en conclure comment ils se comportent à la limite.

(b) Le point 1 est commun à tous les intervalles en question, et puisque $\frac{n}{n+1} \to 1$ et $1+\frac{1}{n+1} \to 1$, c'est le seul point commun. On en déduit :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}, 1+\frac{1}{n+1}\right) = \{1\}.$$

Encore une fois, ma correction sera très libérale.

[4 points = 2pt × 2].

6

(a) La composée $g \circ f$ envoie A dans C.
Soient donc $a, b \in A$, où $a \neq b$. Puisque f est injective, on a $f(a) \neq f(b)$, où $f(a), f(b) \in B$.
Et puisque g est injective, on a $g(f(a)) \neq g(f(b))$, c.à.d., $(g\circ f)(a) \neq (g \circ f)(b)$. On en conclut : $g \circ f$ est une fonction injective.

(b) Ici, $h[U] = \{h(u) : u \in U\}$ est l'image de U par f.
Supposons donc que $h : Y \to Z$ est injective, et soit $x \in h[U^c]$ quelconque. Cela veut donc dire qu'il existe $y \in U^c$ avec $x = h(y)$. On va montrer que

$$x \in h[U]^c,$$

en d'autres mots,

$$x \notin h[U].$$

Supposons que $x \in h(U)$, c.à.d., $x = h(u)$ pour un certain $u \in U$. On en conclut :

$$h(u) = x = h(y), \quad \text{où} \quad u \in U,\ y \in U^c.$$

Mais cela contredit l'injectivité de h. On en conclut : l'hypothèse $x \in h(U)$ était fausse, et $x \in h(U]^c$, comme souhaité.

8 points = 4 pt × 2.

(a) : 1 pt ← la compréhension de l'injectivité
1 pt ← — " — " — " — l'idée de la preuve,
1 pt ← la structure correcte de la preuve
1 pt ← pour mettre tout ça ensemble.

(b) : 1 pt ← la compréhension de l'image directe
1 pt ← — " — " — " — l'idée de la preuve
1 pt ← la structure de l'argument
1 pt ← pour mettre tout ça ensemble.

7

[5 points]

1 pt : ← savoir l'argument diagonal.
1 pt : pour l'injection $X \rightarrowtail A^X$.
1 pt : pour considérer une fonction $\Phi : X \to A^X$
1 pt : pour construire une $f \notin \Phi(X)$,
1 pt pour les explications.

(a) On peut utiliser le résultat connu : $|X| < |\mathcal{P}(A)|$, ou bien montrer le résultat directement. Voici la preuve directe.

D'abord, il est clair que $|X| \le |A^X|$. Par exemple, une injection est donnée par : $x \mapsto F(x)$, où $F(x) \in A^X$, $F(x) : X \to A$,

$$F(x)(y) = \begin{cases} a, & \text{si } x = y, \\ b, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Si $x, z \in X$, $x \neq z$, alors $F(x)(x) = a$ et $F(z)(x) = b$, donc $F(x) \neq F(z)$, et F est une injection.

Montrons que $|X| \neq |A^X|$. ~~Supposons qu'il existe une bijection~~ Considérons une fonction quelconque, $\Phi : X \to A^X$. Pour tout $x \in X$, l'image $\Phi(x)$ est une fonction de X vers A. Construisons une fonction $f : X \to A$ en posant pour chaque $x \in A$:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{si } \Phi(x)(x) = a \text{ ou } c, \\ a, & \text{si } \Phi(x)(x) = b. \end{cases}$$

Évidemment, quel que soit $x \in X$, on a

$$\Phi(x)(x) \neq f(x),$$

donc $\Phi(x) \neq f$. On en conclut : $\Phi : X \to A^X$ n'est pas surjective.

[3 points]

2 pts ← trouver l'injection suggérée, montrer qu'elle est injective
1 pt : pour combiner ça avec (a).

(b) L'injection naturelle de A^X dans $Rel(X, A) = \mathcal{P}(X \times A)$ est donnée par la fonction qui associe à chaque $f : X \to A$ son graphe :

$$gr\, f = \{(x, a) : x \in X, a \in A, f(x) = a\}.$$

Deux fonctions différentes ont des graphes différents : si $f \neq g$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Cela veut dire que $(x, f(x)) \in gr\, f$, mais $(x, f(x)) \notin gr\, g$.

On en déduit : $|Rel(X, A)| \geq |A^X| > |X|$.

(8)

(a)

Réflexivité : si $(x,y) = (u,v)$, alors

3 pts = 1+1+1

$$2x+y = 2u+v.$$

Symétrie : si $(x,y) \sim (u,v)$, alors

$$2x+y = 2u+v,$$

d'où $2u+v = 2x+y$, c.à.d., $(u,v) \sim (x,y)$.

Transitivité : si $(x,y) \sim (u,v)$ et $(u,v) \sim (a,b)$, on a

$$2x+y = 2u+v \quad \text{et} \quad 2u+v = 2a+b, \text{ d'où}$$

$$2x+y = 2a+b, \text{ c.à.d., } (x,y) \sim (a,b).$$

(b) $[(0,0)] = \{(u,v) : 2u+v = 0\}$
$= \{(u,v) : v = -2u\}$.

2 pts
(seulement 1 pt pour la réponse, sans rien expliquer)

C'est une droite qui passe par l'origine, avec la pente -2.

(c) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, définissons $C_t = \{(x,y) : 2x+y = t\}$.

3 pts :
1 pt ← l'idée correcte
1 pt ← pour la fonction C bien définie
1 pt ← la vérification de la bijection

Montrons que C est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\sim$.

Vérifions d'abord que C est bien définie, c.à.d., que C_t est une classe d'équivalence. Si $(x,y) \in C_t$, $(u,v) \in C_t$, alors $2x+y = t = 2u+v$, donc $(x,y) \sim (u,v)$. Si maintenant $(x,y) \in C_t$ et $(u,v) \sim (x,y)$, alors $2u+v = 2x+y = t$, d'où $(u,v) \in C_t$. Cela veut donc que, si $(x,y) \in C_t$, on a $C_t = [(x,y)]$.

>>> (suite à la page 9) >>>>

L'injectivité de C.

Si $t \neq s$, soient $(x,y) \in C_t$ et $(u,v) \in C_s$.

On a :

$$2x+y = t \neq s = 2u+v,$$

donc $(x,y) \not\sim (u,v)$. On en conclut : les deux classes, C_t et C_s, sont disjointes, $C_t \neq C_s$.

La surjectivité de C.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ quelconque. Posons $t = 2x+y \in \mathbb{R}$.

On a : $(x,y) \in C_t$, et par conséquent, $[(x,y)] = C_t$, où $[(x,y)]$ est la classe d'équivalence de (x,y).

[8 points]

(9)

(a) (1 pt) $\forall b\ \exists a\ \ b<a \wedge \forall x\ \ (b \le x \wedge x \le a) \to (b=x \vee b=a)$.

(b) (3 pt) $\neg\left(\forall b\ \exists a\ \ (b<a) \wedge \left(\forall x\ \ (b\le x \wedge x\le a) \to (b=x \vee b=a)\right)\right) \equiv$

$\equiv \exists b\ \forall a\ \neg(b<a) \vee \left(\exists x\ \ (b\le x \wedge x\le a) \wedge \neg(b=x) \wedge \neg(b=a)\right)$

Ou, de façon encore équivalente :

(*) $\equiv \exists b\ \ \forall a\ \ \ (b<a) \longrightarrow (\exists x\ \ \ b<x \wedge x<a)$.

(c) (4 pt) Un ordre est <u>dense</u> si

$\forall a\ \forall b\ \ (b<a) \to (\exists x\ \ (b<x<a))$.

On suppose que A n'est pas vide. Alors, on peut choisir un $b \in A$ quelconque, et la densité nous donne :

$\forall a\ \ \ (b<a) \to (\exists x\ \ b<x \wedge x<a)$.

Cela veut donc que nous avons vérifié (*).

<u>Remarque</u> : si A est vide, alors l'énoncé "tout élément de A a un successeur" est valide de façon triviale, et si vous avez noté ça, cela vous apporte 1 point bonus.

[8 points] = 1 pt pour (a), 3 pts pour (b) (avec −1 pt pour chaque étape manquante), 4 pts pour (c) : 1 pour comprendre la densité, 1 pt pour l'idée de la preuve, 1 pour la structure, 1 pour l'apparence générale.

Bonus

(Un esquisse)

On identifie d'abord A avec $A \times \{0\}$, B avec $B \times \{1\}$. $a \mapsto (a,0)$, $b \mapsto (b,1)$.

Pour chaque $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$, définissons :

$$\tilde{C} = (C \cap A,\ C \cap B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B).$$

Maintenant on vérifie que la correspondance

$$C \longmapsto \tilde{C}$$

est injective et surjective.

<u>Injectivité.</u> Si $C \neq C'$, il existe $x \in C \Delta C'$. Supposons que $x \in C \setminus C'$. De plus, $x \in A$ ou $x \in B$; sans perte de généralité, supposons $x \in A$. Alors, $C \cap A \neq C' \cap A$, et on en conclut $\tilde{C} \neq \tilde{C}'$. Les trois cas restants sont pareils.

<u>Surjectivité.</u> Soit $(D, E) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
Posons $C = D \sqcup E$, c.-à-d., plus précisément,

$$C = D \times \{0\} \cup E \times \{1\} \subseteq A \sqcup B.$$

On voit aisément que $\tilde{C} = (D, E)$.

[3 points] : 1pt $\leftarrow$ l'idée
1pt $\leftarrow$ la fonction $C \mapsto \tilde{C}$
1pt $\leftarrow$ la preuve de la bijectivité

<u>NB</u> : Pour d'autres problèmes, je suis généreux avec des points partiels — par ici, un effort doit être <u>sérieux</u> pour obtenir des notes partielles dans le problème bonus.