Université d'Ottawa

Département de mathématiques et de statistique

MAT 2762 : Fondements des Mathématiques
Professeur : Alistair Savage

Deuxième Test – Solutions
6 novembre 2009

Nom de famille ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant(e) ______________________

Instructions :

(a) Vous avez 80 minutes pour compléter ce test.
(b) Le nombre de points disponibles pour chaque question est indiqué entre crochets.
(c) Dans les questions à développer, vous devez justifier vos réponses pour recevoir le maximum de points.
(d) Tous vos réponses doivent être écrites dans l'espace prévu. Si vous avez besoin d'espace supplémentaire pour répondre à une question particulière, vous devez continuer au verso de la page et l'indiquer clairement.
(e) Veuillez écrire votre numéro d'étudiant en haut de chaque page dans l'espace prévu.
(f) Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes, ni aucun livre. L'usage de calculatrices, de téléphones cellulaires, de pagettes et autres n'est pas autorisé.
(g) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.

Bonne chance !

S'il vous plaît ne pas écrire dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	Total
Maximum	5	10	8	8	9	40
Note						

1. [**5 pts**] Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et inscrivez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Pour cette question, vous ne devez pas justifier vos réponses.

(a) Si X, Y et Z sont des ensembles et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des fonctions tels que $g \circ f$ est une bijection, alors f et g sont des bijections.

Solution: $\mathbb{F}$. En général, on sait seulement que f est injective et g est surjective.

(b) Si X et Y sont des ensembles et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont des fonctions tels que $g \circ f : X \to X$ est une bijection, alors f et g sont des bijections.

Solution: $\mathbb{F}$. Par exemple, on peut avoir $X = Y = \mathbb{N}$ et définir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $f(n) = 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est une bijection mais f et g ne sont pas des bijections.

(c) Si X et Y sont des ensembles et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont des fonctions tels que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des bijections, alors f et g sont des bijections.

Solution: $\mathbb{V}$. Puisque $g \circ f$ est une bijection, on sait que g est une surjection et f est une injection. Puisque $f \circ g$ est une bijection, on sait que f est une surjection et g est une injection. Donc f est g sont bijectives.

Pour les questions (d) et (e) on suppose que x et y sont des ensembles.

(d) $\exists_x \forall_y (x \in y)$

Solution: $\mathbb{F}$. Quel que soit x, on peut définir un ensemble qui ne contient pas x (par exemple $\{a \mid a \neq x\}$).

(e) $\exists_x \forall_y [x \cap \wp(y) \neq \emptyset]$

Solution: $\mathbb{V}$. Si $x = \{\emptyset\}$, on a $\emptyset \in x \cap \wp(y)$ pour tout choix de y. Donc $x \cap \wp(y) \neq \emptyset$.

Solution:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$

2. **[10 pts]** Pour cette question, vous devez seulement donner une réponse (c.-à.-d. vous ne devez pas justifier vos réponses).

(a) Quel est l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{200}(\frac{-2}{n}, 1-\frac{1}{n}]$? Écrire votre réponse sous forme d'un intervalle.

Solution: $(\frac{-1}{100}, 0]$

(b) Quel est l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2}, n^3]$? Écrire votre réponse sous forme d'un intervalle.

Solution: $(0, \infty)$. Remarquez que 0 n'est pas inclus parce que il n'est pas un élément de l'un des intervalles.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - x^2$. Quel est $f((3, 4])$? Écrire votre réponse sous forme d'un intervalle.

Solution: $[-15, -8)$

(d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - x^2$. Quel est $f^{-1}([-8, 2))$? Écrire votre réponse sous forme d'un intervalle.

Solution: $[-3, 3]$. Beaucoup d'étudiant(e)s avaient des problèmes avec cette question. Dessiner une image !

(e) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3$. Donner explicitement les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. C.-à.-d. écrire les polynômes $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ sous la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ où $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$.

Solution: $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 2$ et $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

3. Soit $f : A \to B$ une fonction.

(a) **[2 pts]** Montrer que $\forall_{E \subseteq B}\, f(f^{-1}(E)) \subseteq E$.

Solution: Soit $E \subseteq B$. Alors

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(E)) &= f(\{x \mid x \in A \ \wedge \ f(x) \in E\}) \\ &= \{f(x) \mid x \in A \ \wedge \ f(x) \in E\} \\ &\subseteq E \end{aligned}$$

(b) **[2 pts]** Donner l'exemple d'une fonction $f : A \to B$ et $E \subseteq B$ telle que $f(f^{-1}(E)) \neq E$.

Solution: Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la fonction défini par $f(x) = |x|$ et $E = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Alors $f^{-1}(E) = \{1\}$ et $f(f^{-1}(E)) = f(\{1\}) = \{1\} \neq E$.

(c) **[3 pts]** Montrer que si f est surjective, alors $\forall_{E\subseteq B}\, f(f^{-1}(E)) = E$.

Solution: Soit $E \subseteq B$. Par partie (a), on sait déjà que $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$. Donc on doit montrer que $E \subseteq f(f^{-1}(E))$. Soit $y \in E$. Puisque f est surjective, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Donc $x \in f^{-1}(E)$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(f^{-1}(E))$. Donc $E \subseteq f(f^{-1}(E))$.

(d) **[1 pt]** Montrer que si f est surjective, alors la fonction induite $\tilde{f} : \wp(A) \to \wp(B)$ est aussi surjective. (*Indice :* Utiliser la partie (c).)

Solution: Supposons que f est surjective. Pour chaque $E \in \wp(B)$ (c.-à.-d. $E \subseteq B$), on a $f^{-1}(E) \in \wp(A)$ et $\tilde{f}(f^{-1}(E)) = f(f^{-1}(E)) = E$ par partie (c). Donc $\tilde{f}$ est surjective.

4. Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On définit une relation $\sim$ dans X par

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \text{si et seulement si} \quad \exists_{r\in\mathbb{R}}(x,y) = r(x',y'). \tag{*}$$

(a) **[5 pts]** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Solution: On doit montrer que la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

(i) *Réflexive.* Pour tout $(x,y) \in X$, on a $(x,y) = 1 \cdot (x,y)$ et donc $(x,y) \sim (x,y)$.

(ii) *Symétrique.* Supposons que $(x,y),(x',y') \in X$ tel que $(x,y) \sim (x',y')$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = r(x',y')$. Puisque $(x,y) \neq (0,0)$ on sait que $r \neq 0$. Alors $1/r \in \mathbb{R}$ et $(x',y') = (1/r)(x,y)$. Donc $(x',y') \sim (x,y)$.

(iii) *Transitive.* Supposons que $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in X$ tel que $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2) \sim (x_3,y_3)$. Alors il existe $r,s \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x_1,y_1) = r(x_2,y_2) \quad \text{et} \quad (x_2,y_2) = s(x_3,y_3).$$

Alors $(x_1,y_1) = r(s(x_3,y_3)) = (rs)(x_3,y_3)$ et donc $(x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$.

(b) **[1 pt]** Décrire géométriquement la classe d'équivalence de $(2,3)$.

Solution: La class d'équivalence de $(2,3)$ et tous les multiplies non-zero de $(2,3)$. Donc c'est la ligne droite dans $\mathbb{R}^2$ par l'origine et $(2,3)$ moins l'origine.

(c) **[2 pts]** Si $X = \mathbb{R}^2$ et si on définit la relation $\sim$ par (*), est-ce que c'est encore une relation d'équivalence ?

Solution: Non, parce qu'elle n'est pas symétrique. Par exemple, $(0,0) = 0 \cdot (1,1)$ et donc $(0,0) \sim (1,1)$. Mais il n'existe aucun élément r de $\mathbb{R}$ tel que $(1,1) = r(0,0)$ et donc $(1,1) \not\sim (0,0)$.

5. Soit $X = \mathbb{N}^+$ l'ensemble des nombres naturels positifs. On définit une relation $\preceq$ dans X par

$$n \preceq m \quad \text{si et seulement si} \quad n \text{ divise } m.$$

(a) **[5 pts]** Montrer que $\preceq$ est un ordre partiel.

Solution: On doit montrer que la relation est réflexive, transitive, et antisymétrique.

(i) *Réflexive.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, $n = 1 \cdot n$ est donc n divise n. Par conséquent, $n \preceq n$.

(ii) *Transitive.* Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ tel que $a \preceq b$ et $b \preceq c$. Donc a divise b et b divise c. Cela veut dire qu'il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$ et $c = lb$. Donc $c = l(ka) = (lk)a$. Par conséquent, a divise c et donc $a \preceq c$.

(iii) *Antisymétrique.* Supposons que $a, b \in \mathbb{N}^+$ tel que $a \preceq b$ et $b \preceq a$. Donc il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$ et $a = lb$. Donc $b = k(lb) = (kl)b$. Par conséquent $kl = 1$ (parce que $b \in \mathbb{N}^+$ et donc $b \neq 0$). Donc $k = l = 1$ et $a = b$.

(b) **[1 pt]** Est-ce $\preceq$ un ordre total ?

Solution: Non. Par exemple 3 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 3. Donc $3 \not\preceq 5$, $5 \not\preceq 3$ et $3 \neq 5$.

(c) **[3 pts]** Donner tous les éléments maximaux et minimaux des sous-ensembles de $\mathbb{N}^+$ suivants (sous la relation $\preceq$ définie ci-dessus) :

(i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

Solution: Maximaux : 3, 4, 7, 10. Minimaux : 1.

(ii) L'ensemble des nombres premiers positifs (rappelez-vous que 1 n'est pas un nombre premier).

Solution: Chaque élément est maximal et minimal.