$A^B = \text{Fonc}(B, A)$

Nom de famille (MAJUSCULES)	______________________
Prénom (MAJUSCULES)	______________________
Signature	______________________
Numéro d'étudiant	______________________

Mat 2762 Examen final

Professeur: D. Daigle décembre 2008 Durée: 3 heures

- **Calculatrices, notes de cours et manuels non permis.**

- Si A, B sont des ensembles alors "$A \preceq B$" signifie qu'il existe au moins une injection de A vers B.
- Si A, B sont des ensembles alors B^A désigne l'ensemble des fonctions de A vers B.
- ω est l'ensemble des nombres naturels et n^+ est le successeur de n.

Espace réservé au correcteur.

(1) (4 pts) Prouvez les équivalences suivantes par manipulations algébriques.

(a) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y) \equiv (X \vee Y)$
(b) $(X \wedge (X \vee Y)) \equiv X$

La liste des équivalences permises est au bas de la page. Chaque étape de votre preuve doit être justifiée en donnant le numéro de l'équivalence que vous utilisez.

(a) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y \overset{(1)}{\equiv} \neg(X \Rightarrow Y) \vee Y$

$\overset{(1)}{\equiv} \neg(\neg X \vee Y) \vee Y$

$\overset{(19)}{\equiv} (\neg\neg X \cancel{\vee} \wedge \neg Y) \vee Y$

$\overset{(12)}{\equiv} (X \wedge \neg Y) \vee Y$

$\overset{(13)}{\equiv} Y \vee (X \wedge \neg Y) \overset{(17)}{\equiv} (Y \overset{\vee}{\cancel{\wedge}} X) \wedge (Y \vee \neg Y) \overset{(4)}{\equiv} (Y \vee X) \wedge \mathbf{V}$

$\overset{(7)}{\equiv} Y \vee X \overset{(13)}{\equiv} X \vee Y$

(b) $X \wedge (X \vee Y) \overset{\cancel{(18)}(6)}{\equiv} (X \vee \mathbf{F}) \wedge (X \vee Y) \overset{(5)}{\equiv} [X \vee (Y \wedge \neg Y)] \wedge (X \vee Y)$

$\overset{(17)}{\equiv} [(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)] \wedge (X \vee Y)$

$\overset{(14)}{\equiv} [(X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y)] \wedge (X \vee Y)$

$\overset{(16)}{\equiv} (X \vee \neg Y) \wedge [(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)] \overset{(11)}{\equiv} (X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y)$

$\overset{(17)}{\equiv} X \vee (\neg Y \wedge Y) \overset{(14)}{\equiv} X \vee (Y \wedge \neg Y) \overset{(5)}{\equiv} X \vee \mathbf{F} \overset{(6)}{\equiv} X$

	Équivalence		Équivalence
(1)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	(10)	$P \vee P \equiv P$
(2)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	(11)	$P \wedge P \equiv P$
(3)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	(12)	$\neg\neg P \equiv P$
(4)	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$	(13)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
(5)	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	(14)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
(6)	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$	(15)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
(7)	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	(16)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
(8)	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	(17)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
(9)	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(18)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
		(19)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
		(20)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

(2) (8 pts) Considérez l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ et les assertions :

$$P: \ \forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \left([(x,y) \in A \ \wedge \ (x,z) \in A] \implies y = z\right)$$

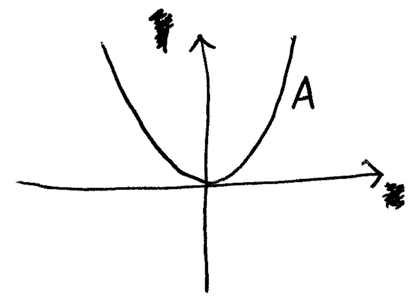
$$Q: \ \forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \left([(x,z) \in A \ \wedge \ (y,z) \in A] \implies x = y\right)$$

$$R: \ \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} [(x,y) \in A]$$

$$R': \ \exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}} [(x,y) \in A]$$

$$S: \ \forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{x\in\mathbb{R}} [(x,y) \in A]$$

$$S': \ \exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}} [(x,y) \notin A]$$



(a) (6 pts) Donnez la valeur de vérité de chacune des six assertions ci-dessus (répondez par **V** ou **F**, sans expliquer).

Réponses :

P	Q	R	R'	S	S'
V	F	V	F	F	V

(b) (2 pts) Écrivez la négation des assertions P et R ci-dessus. Simplifiez vos réponses jusqu'à ce que le symbole "$\neg$" ait disparu (vos réponses peuvent contenir les symboles $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$ mais ne peuvent pas contenir $\neg$).

Réponses :

$\neg P$:

$\neg R$:

$$\neg P \equiv \exists_{x,y,z\in\mathbb{R}} \neg\left([(x,y)\in A \wedge (y,z)\in A] \Rightarrow y = z\right)$$
$$\equiv \exists_{x,y,z\in\mathbb{R}} \neg\left(\neg[(x,y)\in A \wedge (y,z)\in A] \vee (y=z)\right)$$
$$\equiv \exists_{x,y,z\in\mathbb{R}} \left([(x,y)\in A \wedge (y,z)\in A] \wedge (y\neq z)\right)$$

$$\neg R \equiv \exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} [(x,y)\notin A]$$

(3) (4 pts) Soit P l'assertion : $\forall_{x_1 \in \mathbb{R}} \exists_{x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \left[(x_1, y) \in B \implies (x_2, y) \in B \right]$.

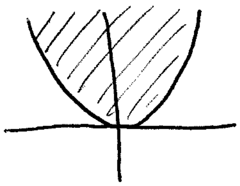
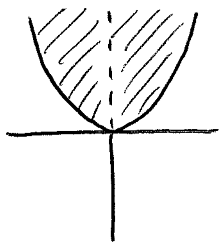
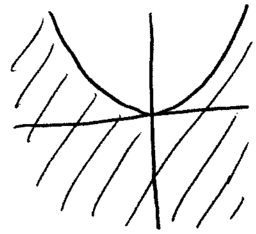
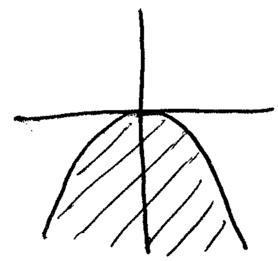
Dans chaque cas ci-dessous, répondez "**V**" si l'ensemble B satisfait P, répondez "**F**" si l'ensemble B ne satisfait pas P. (Aucune explication requise.)

(a) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \}$. Réponse : ~~V~~ F

(b) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \ \wedge \ x \neq 0 \}$. Réponse : V

(c) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \}$. Réponse : V

(d) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 \}$. Réponse : F

(a)

(b)

(c)

(d)


(4) (3 pts) Placez-vous dans le contexte de la théorie axiomatique ZFC des ensembles pour répondre à la question suivante :

Existe-t-il des ensembles A et B satisfaisant $\forall_x \ [x \notin A \implies x \in B]$?

Justifiez votre réponse.

Non. Par contradiction : Supposons que tels ensembles A et B existent. Par les axiomes de ZFC, $A \cup B$ existent.

Mais $\forall_x \ [x \in A \cup B]$

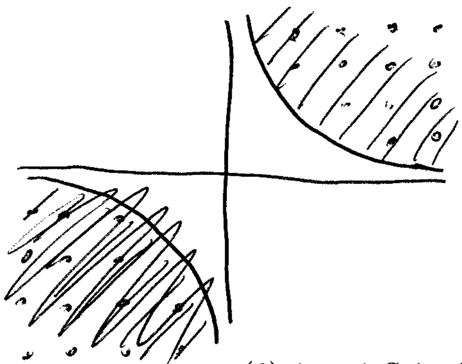
qui est une contradiction (l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas).

(5) (3 pts) On définit l'ordre lexicographique sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$ par

$$(x, y) \leq (x', y') \iff [x < x' \quad \vee \quad (x = x' \ \wedge \ y \leq y')]$$

où $(x, y), (x', y') \in \mathbb{N}^2$. On a vu en classe que $(\mathbb{N}^2, \leq)$ est alors un ensemble bien ordonné.

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid xy > 10\}$. Puisque A est une partie non vide de $\mathbb{N}^2$, A possède un élément minimum. Quel est cet élément ? Justifiez votre réponse.



$(1, 11)$

Soit $(x, y) \in A$. Alors $x \geq 1$.

Si $x > 1$, alors $(1,11) \leq (x,y)$

Si $x = 1$, on a $y > 10 \Rightarrow y \geq 11$

$\Rightarrow (1,11) \leq (x,y)$

(6) (3 pts) Soit $A = \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$. Si $\leq$ est la relation d'ordre usuelle des nombres réels, alors $(A, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné. Est-il bien ordonné ? Justifiez votre réponse.

Non $(4,5) \subseteq A$ mais $(4,5)$ n'a aucun élément minimum.

(7) (3 pts) Donnez un exemple d'un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ et d'un élément $a \in A$ tel que a est un élément maximal de A mais pas un élément maximum de A.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad n \leq m \Leftrightarrow n$ divise m

Alors 3 est maximal mais pas maximum.

(8) (4 pts) Étant donnée une relation binaire R sur un ensemble X, on définit une nouvelle relation S sur X par

$$xSy \iff (xRy \ \wedge \ x \neq y).$$

Montrez que si S est transitive alors R satisfait

$$\forall_{x,y \in X} \ \big[(xRy \ \wedge \ yRx) \Rightarrow x = y\big].$$

Suggestion : preuve par contradiction.

Supposons que S est transitive et que R ne satisfait pas $\forall_{x,y\in X} [(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y]$

Donc $\exists_{x,y\in X} \neg[(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y]$

$\therefore \exists_{x,y\in X} [(xRy \wedge yRx) \wedge x \neq y]$

$\therefore \exists_{x,y\in X} [xSy \wedge yS\cancel{y}x]$

Mais S est tranisitive. Donc xSx

Par définition, on a $xRx \wedge x \neq x$ qui est une contradiction.

(9) (4 pts) Supposons que $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ sont des familles d'ensembles qui satisfont $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$ et :

$$(*) \qquad \forall_{j\in J}\, \exists_{i\in I}\ (A_i \subseteq B_j).$$

Montrez que $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{j\in J} B_j$.

(Rappel : la condition $x \in \bigcap_{j\in J} B_j$ est équivalente à $\forall_{j\in J}\ (x \in B_j)$.)

Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Soit $j \in J$. Par $(*)$, ~~en~~ $\exists_{i\in I}\ (A_i \subseteq B_j)$

Soit $i \in I$ t.q. $A_i \subseteq B_j$.

On a $x \in A_i$, alors $x \in B_j$.

Donc $\forall_{j\in J}\ x \in B_j$ et donc $x \in \bigcap_{j\in J} B_j$.

Donc $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{j\in J} B_j$

(10) (3 pts) On a vu en classe le principe d'induction suivant :

Si S est un sous-ensemble de ω tel que $\varnothing \in S$ et tel que $\forall_n (n \in S \implies n^+ \in S)$, alors $S = \omega$.

Utilisez ce principe d'induction pour montrer que $\forall_{n \in \omega} (\varnothing \in n^+)$.

Soit $S = \{n \in \omega \mid \phi \in n^+\}$. Montrons que $S = \omega$.

Puisque $\phi \in \phi^+ = \phi \cup \{\phi\} = \{\phi\}$, on a $\phi \in S$.

Soit $n \in S$. Alors $\phi \in n^+$

Donc $\phi \in n^+ \cup \{n^+\} = (n^+)^+$

Donc $n^+ \in S$.

Par le principe d'induction ci-dessus, $S = \omega$.

Pour les questions (11), (12) et (13), vous pouvez utiliser les théorèmes vus en classe ou dans les notes de cours, mais **vous devez énoncer tout résultat que vous utilisez.**

(11) (5 pts) Soient A, B_1 et B_2 des ensembles et supposons que $B_1 \preceq B_2$. Montrez que $B_1^A \preceq B_2^A$.

Devoir ~~B~~ 4.

(12) (5 pts) Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Si $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ satisfont

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \textit{ est un ensemble dénombrable}$$

alors on écrit $f \equiv g$. Montrez que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (soyez prudent avec la transitivité).

Réf: $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq f(x)\} = \emptyset$ qui est dénombrable.
Donc $f \equiv g$.

Sym: Supposons $f \equiv g$.
Alors $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$
est dén. Donc $g \equiv f$.

Transitivité: Supposons $f \equiv g$ et $g \equiv h$.
Montrons
$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq h(x)\}}_{=A} \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq h(x)\}}_{=B}$$

Soit $x \in A$. Par contradiction: supposons que $x \notin B$.
Donc $f(x) = g(x)$ et $g(x) = h(x)$
Donc $f(x) = h(x)$. et $x \notin A$, une contradiction.
Donc $A \subseteq B$
B est dénombrable (union d'ensembles dénombrables)
Donc A est dénombrable. et $f \equiv h$.

(13) (6 pts) Soit A un ensemble.
Soit $\{0,1\}^A$ l'ensemble de toutes les fonctions de A vers $\{0,1\}$.

Remarquez que si $f \in \{0,1\}^A$ alors l'ensemble $\{x \in A \mid f(x) = 1\}$ est un élément de $\wp A$. Ceci nous permet de définir la fonction H suivante :

$$H : \{0,1\}^A \longrightarrow \wp A, \quad H(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\}.$$

Montrez que H est bijective.

Supposons $H(f) = H(g)$

$\therefore \{x \in A \mid f(x) = 1\} = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$

$\therefore \forall_{x \in A} [f(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = 1]$

Puisque $\forall_{x \in A} [f(x) = 1 \vee f(x) = 0]$

et $\forall_{x \in A} [g(x) = 1 \vee g(x) = 0]$

Donc $\forall_{x \in A}$ $f(x) = g(x)$. Donc $f = g$.

Donc H est injective.

Soit $B \in P(A)$. Donc $B \subseteq A$.

On définit $f \in \{0,1\}^A$ part

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sie } x \notin A \end{cases}$$

Donc $H(f) = B$.

Donc H est surjective.