MAT 2742, Automne 2011

Devoir 5 – Solutions

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 1 décembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question.

1. (5 points) Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 10. Diagonaliser orthogonalement A. C'est-à-dire, trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^T$.

Solution: Pour $\lambda = 1$, on trouve l'espace propre correspondant.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc une base pour l'espace propre E_1 est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

On a besoin d'une base orthonormale. Pour obtenir une base orthogonale, on utilise la méthode Gram-Schmidt. On a

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On divise $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ par leurs longueurs pour obtenir une base orthonormale pour E_1 :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

Pour $\lambda = 10$, on calcule l'espace propre correspondant.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - 10I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc une base pour l'espace propre E_{10} est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisqu'il y a seulement un vecteur dans la base, c'est déjà une base orthogonale. Alors, pour obtenir une base orthonormale, on doit seulement diviser le vecteur par sa longueur. Ça donne la base orthonormale

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$$

pour E_{10}.

Donc on a $A = PDP^T$, où

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

2. (6 points) Trouver le minimum de $4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ sujet à la condition que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Déterminer aussi les valeurs de x_1, x_2, x_3 qui donnent ce minimum. Quel est le maximum ? Vous ne devez pas trouver les valeurs des variables qui donnent le maximum.

Solution: En forme matricielle, le problème est

$$\max \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1.$$

Par Théorème 11.15 dans les notes, le minimum est la valeur propre minimale de $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et ce minimum est atteint lorsque $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant. Donc on trouve les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\big((4-\lambda)^2 - 4\big) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6)$$

Alors les valeurs propres de A sont $2, 3, 6$ et donc le minimum de $4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - x_3^2$ sujet à la condition que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ est 2. Pour trouver les valeurs de x_1, x_2, x_3 qui donnent ci minimum, on doit trouver l'espace propre qui correspond à la valeur propre 2. C'est-à-dire, on doit résoudre $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - 2I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc une base pour l'espace propre E_2 est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque le vecteur doit satisfaire la condition $\|\mathbf{x}\| = 1$, on prend les vecteur dans E_2 de longueur un (il y en a deux !). Ça donne les vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc les solutions sont $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$, $x_3 = 0$ et $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$, $x_3 = 0$.

Par Théorème 11.14 dans les notes, le maximum est la valeur propre maximale de A. Donc le maximum est 6.

3. (8 points) Considérer la condition quadratique $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 12$.

(a) Donner la matrice symétrique A qui représente la forme quadratique $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$.

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Trouver une décomposition $A = PDP^T$, où P est une matrice orthogonale et D est une matrice diagonale.

Solution: On trouve les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

Donc les valeurs propres sont 1 et 6. Pour chaque valeur propre, on trouve une base pour l'espace propre correspondant. On commence avec $\lambda = 1$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc l'espace propre E_1 est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Puisqu'on veut une base *orthonormale* pour chaque espace propre, on divise ce vecteur par sa longueur, et on obtient la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

Maintenant, on considère $\lambda = 6$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - 6I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc l'espace propre E_6 est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Puisqu'on veut une base *orthonormale* pour chaque espace propre, on divise ce vecteur par sa longueur, et on obtient la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}.$$

(Notez que vous pouvez vérifier vos réponses ici en vérifiant que les deux vecteurs sont vecteurs propres et qu'ils sont orthogonaux.)

Donc on a $A = PDP^T$, où

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(c) Trouver un changement de variable qui donne une forme sans terme rectangle. Donner la transformation et la nouvelle forme.

Solution: Si on met $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, on a

$$\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{y} = y_1^2 + 6y_2^2.$$

(d) Écrire la condition sous la forme $z_1^2 + z_2^2 = 1$. Préciser x_1 et x_2 en termes de z_1 et z_2.

Solution: On a

$$y_1^2 + 6y_2^2 = 12 \implies \frac{y_1^2}{12} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \implies \left(\frac{y_1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \implies z_1^2 + z_2^2 = 1,$$

où $z_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}y_1$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$. On a

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}(2\sqrt{3}z_1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}z_2) = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}z_1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}z_2, \\ x_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}(2\sqrt{3}z_1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}z_2) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}z_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}z_2. \end{aligned}$$

4. (9 points) Décomposer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en valeurs singulières.

Solution: On calcule

$$A^TA = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A^TA est

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25).$$

Donc les valeurs propres de A^TA (en ordre décroissant) sont $\lambda_1 = 25$ et $\lambda_2 = 0$. Pour λ_1, on trouve l'espace propre.

$$\left[\begin{array}{c|c} A - 25I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Un vecteur propre unitaire correspondant est donc

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

On fait les mêmes calcules pour λ_2.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Un vecteur propre unitaire correspondant est

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

On sait maintenant qu'un choix pour V est

$$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Les valeurs singulières de A sont $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$ et $\sigma_2 = \sqrt{0} = 0$. Alors la matrice Σ est

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, on doit trouver les autres colonnes de U en élargissant $\{\mathbf{u}_1\}$ à une base orthonormale pour $\mathbb{R}^3$. On a besoin de deux vecteurs unitaires orthogonaux qui sont orthogonaux à $\mathbf{u}_1$. Chaque vecteur doit satisfaire l'équation $\mathbf{u}_1^T\mathbf{x} = 0$, qui équivaut $2x_1 + x_2 = 0$. Une base orthonormale pour l'ensemble des solutions pour cette équation est

$$\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}, \quad \text{où} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, si

$$U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

on a

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$