MAT 2742, Automne 2011

Devoir 4

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 17 novembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question.

1. (8 points) Soient

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 28 \\ 69 \\ -134 \\ 168 \end{bmatrix}.$$

(Rappelez-vous que $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est le sous-espace engendré par l'ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.) Calculer $\mathrm{proj}_U(\mathbf{x})$ et $\mathrm{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x})$. Trouver une base pour $U^\perp$.

2. (12 points) On mesure quatre valeurs qui sont représentées dans le tableau suivant. On pense que les données devraient suivre une courbe de la forme $y = \alpha x + \beta$, pour des constantes inconnues α et β.

x	1	0	2	-2
y	0	-6	-9	-18

(a) Écrire sous forme matricielle le système d'équations approximatif $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

(b) Donner une base orthogonale pour $\mathrm{col}\, A$.

(c) Calculer la projection $\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}\, A}(\mathbf{b})$.

(d) Solutionner $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$. Donner les valeurs de α et β correspondant à la courbe $y = \alpha x + \beta$ qui modèle les données le mieux.

(e) Donner le système d'équations normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

(f) Solutionner le système d'équations normales. Comparer avec les valeurs de α et β obtenues en (d).

(g) En utilisant la solution précédente, calculer $\hat{\mathbf{b}} = A\mathbf{x}$. Comparer avec la valeur de $\hat{\mathbf{b}}$ obtenue en (c).

3. (6 points) On veut savoir si une courbe quadratique serait un meilleur modèle pour les données de la question précédente. Donc on propose une courbe de la forme $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.

(a) Écrire sous forme matricielle le système d'équations approximatif $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$.

(b) Donner le système d'équations normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

(c) Solutionner le système d'équations normales (vous pouvez utiliser un solveur). Donner la courbe de la forme $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ qui produit le meilleur modèle des données.