MAT 2742, Automne 2011

Devoir 4 – Solutions

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 17 novembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question.

1. (8 points) Soient

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 28 \\ 69 \\ -134 \\ 168 \end{bmatrix}.$$

(Rappelez-vous que $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est le sous-espace engendré par l'ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.) Calculer $\operatorname{proj}_U(\mathbf{x})$ et $\operatorname{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x})$. Trouver une base pour $U^\perp$.

Solution: On doit trouver une base orthogonale pour U. On applique l'algorithme Gram-Schmidt à l'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_4 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-7}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Noter qu'on n'utilise pas $\mathbf{u}_3$ parce que c'est le vecteur nul (cela implique que $\mathbf{v}_3$ est dans le sous-espace engendré par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$). Donc une base orthogonale pour U est $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$.

Maintenant, on peut calculer

$$\operatorname{proj}_U(\mathbf{x}) = \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}) + \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_4}(\mathbf{x}) = \frac{6}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{21}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-100}{50}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\operatorname{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_U(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 28 \\ 69 \\ -134 \\ 168 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 84 \\ -133 \\ 161 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver une base pour $U^\perp$, on fait une réduction :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/23 & 3/23 & 1/23 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/23 & 12/23 & -19/23 & 1 \end{array}\right]$$

Une base pour $U^\perp$ est donnée par les rangées à la droite qui correspond aux rangées nulles à la gauche (dans la matrice finale). Donc une base pour $U^\perp$ est

$$\left\{\begin{bmatrix} 4/23 \\ 12/23 \\ -19/23 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{où} \qquad \left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -19 \\ 23 \end{bmatrix}\right\}.$$

2. (12 points) On mesure quatre valeurs qui sont représentées dans le tableau suivant. On pense que les données devraient suivre une courbe de la forme $y = \alpha x + \beta$, pour des constantes inconnues α et β.

x	1	0	2	−2
y	0	−6	−9	−18

(a) Écrire sous forme matricielle le système d'équations approximatif $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Solution: On a le système linéaire $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, le système est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

(b) Donner une base orthogonale pour col A.

Solution: On trouve une base orthogonale en appliquant l'algorithme Gram-Schmidt à l'ensemble des colonnes de A (qu'on dénote par $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$).

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/9 \\ 1 \\ 7/9 \\ 11/9 \end{bmatrix},$$

$$\text{base orthogonale : } \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}\right\}.$$

Notez qu'on a multiplié $\mathbf{u}_2$ par 9 pour enlever les fractions. C'est optionnel ! Vous pouvez aussi prendre les colonnes dans l'autre ordre pour obtenir la base orthogonale

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 7/4 \\ -9/4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Calculer la projection $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{col}\, A}(\mathbf{b})$.

Solution: La projection se calcule à l'aide de la base orthogonale pour col A :

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{col}\, A}(\mathbf{b}) = \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{b}) + \text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{b}) = \frac{18}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{-315}{315} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

(d) Solutionner $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$. Donner les valeurs de α et β correspondant à la courbe $y = \alpha x + \beta$ qui modèle les données le mieux.

Solution: On fait une réduction par rapport aux lignes :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -15 \end{array} \right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

La solution est $\alpha = 3$ et $\beta = -9$.

(e) Donner le système d'équations normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Solution: On a

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

Donc le système d'équations normales est

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

(f) Solutionner le système d'équations normales. Comparer avec les valeurs de α et β obtenues en (d).

Solution: On fait une réduction par rapport aux lignes :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 1 & 18 \\ 1 & 4 & -33 \end{array} \right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -9 \end{array} \right].$$

La solution est $\alpha = 3$ et $\beta = -9$. C'est la même solution qu'on a trouvée en utilisant la projection.

(g) En utilisant la solution précédente, calculer $\hat{\mathbf{b}} = A\mathbf{x}$. Comparer avec la valeur de $\hat{\mathbf{b}}$ obtenue en (c).

Solution:

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \\ -15 \end{bmatrix}$$

C'est la même vecteur qu'on a trouvé en utilisant la projection.

3. (6 points) On veut savoir si une courbe quadratique serait un meilleur modèle pour les données de la question précédente. Donc on propose une courbe de la forme $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.

(a) Écrire sous forme matricielle le système d'équations approximatif $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$.

Solution: Chaque rangée de A est de la forme $\begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix}$. Donc on a

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ (-2)^2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

(b) Donner le système d'équations normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Solution: On a

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 \\ 18 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

Donc le système d'équations normales est

$$\begin{bmatrix} 33 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 \\ 18 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

(c) Solutionner le système d'équations normales (vous pouvez utiliser un solveur). Donner la courbe de la forme $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ qui produit le meilleur modèle des données.

Solution: Utilisant un solveur pour faire la réduction par rapport aux lignes, on obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 33 & 1 & 9 & -108 \\ 1 & 9 & 1 & 18 \\ 9 & 1 & 4 & -33 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -105/44 \\ 0 & 1 & 0 & 117/44 \\ 0 & 0 & 1 & -39/11 \end{array}\right].$$

Donc la courbe qui modèle les données le mieux est

$$y = \frac{-105}{44}x^2 + \frac{117}{44}x - \frac{39}{11}.$$