MAT 2742, Automne 2011

Devoir 3 – Solutions

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 3 novembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question.

1. (9 points) Considérer le programme linéaire

$$\max\ 2x+y+z \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x+y \le 2, \\ x-y+2z \le 4, \end{cases} \qquad x,y,z \ge 0.$$

(a) Solutionner ce programme linéaire à l'aide de la méthode simplex. Indiquer bien les étapes.

Solution: On forme le tableau initial (en utilisant h_1 et h_2 pour les variables auxiliaires correspondant aux deux contraintes) :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M & x & y & z & h_1 & h_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

Pour la solution initiale, les variables de base sont h_1 et h_2. Ceci correspond à la solution initiale de $x=y=z=0$, et alors $h_1=2$, $h_2=4$, avec $M=0$.

On cherche à augmenter M, donc on choisit la colonne ayant la valeur la plus négative dans la première rangée : c'est la colonne de x. Les deux contraintes donnent alors $x \le 2$ et $x \le 4$ comme restrictions sur x. La première contrainte est la plus restrictive, donc on choisit cette rangée. On connaît maintenant où on veut avoir un pivot. Il s'agit de faire des opérations de rangée pour l'accomplir.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline\hline 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Les variables de base sont maintenant x et h_2. Ceci correspond à la solution initiale de $y=z=h_1=0$, et alors $x=2$, $h_2=2$, avec $M=4$.

On choisit maintenant la colonne de z. Les deux contraintes donnent alors $0 \le 2$ et $2z \le 2$ comme restrictions sur z. La deuxième est la plus restrictive (la première n'est pas une restriction du tout : on peut augment z autant qu'on veut sans nier $0 \le 2$). Donc on choisit la rangée de la deuxième contrainte. On connaît maintenant où on veut avoir un pivot.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline\hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \boxed{2} & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ \hline\hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Les variables de base sont x et z. Ceci correspond à la solution actuelle de $y=h_1=h_2=0$, et alors $x=2$, $z=1$, avec M=5.

On ne peut plus augmenter M, car la première rangée est non-négative.

La solution optimale est $x=2$, $y=0$, $z=1$ qui donne $M=5$.

(b) Écrivez le dual sous forme matricielle (ce n'est pas nécessaire de le transformer sous forme canonique). Ce n'est pas nécessaire de le résoudre.

Solution: Le primal sous forme canonique est

$$\max 2x + y + z \quad \text{s.c.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \geq 0.$$

Donc le dual est

$$\min 2u + 4v \quad \text{s.c.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u, v \geq 0.$$

(c) En regardant le tableau de simplex final de la partie a), donner la solution optimal du dual. Vérifier directement que cette solution est faisable, et qu'elle donne bien la même valeur objective que dans le programme primal de la partie (a).

Solution: On peut lire la solution optimale du dual dans la première rangée du tableau de simplex final, dans les colonnes correspondant aux variable auxiliares. On obtient $u = \frac{3}{2}$, $v = \frac{1}{2}$, avec $m = 5$.

On vérifie directement ceci car

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc l'inégalité est satisfaite (c'est une égalité !). Aussi on voit que $m = 2u + 4v = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 5$. Comme prévue, on voit que $m = M$.

2. (8 points) Considérer le programme linéaire

$$\max \ 3x_1 + 2x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) Utiliser la méthode simplex pour solutionner le programme.

Solution: On forme le tableau initial :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} M & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Pour la solution initiale, les variables de base sont y_1 et y_2. Ceci correspond à la solution initiale de $x_1 = x_2 = 0$, et alors $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, avec $M = 0$.

On cherche à augmenter M, donc on choisit la colonne ayant la valeur la plus négative dans la première rangée : c'est la colonne de x_1. Les deux contraintes donnent alors $-x_1 \leq 1$ et $x_1 \leq 2$ comme restrictions sur x_1. La deuxième contrainte est la plus restrictive, donc on choisit cette rangée. On connaît maintenant où on veut avoir un pivot. Il s'agit de faire des opérations de rangée pour l'accomplir.

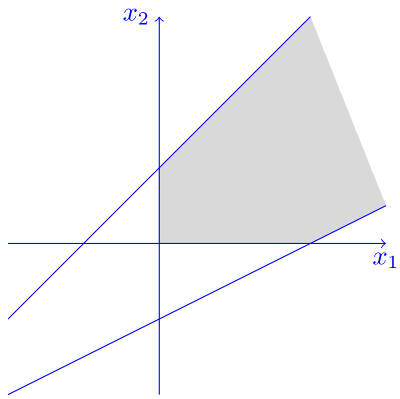
$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & -8 & 0 & 3 & 6 \\ \hline\hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Les variables de base sont maintenant x_1 et y_1. Ceci correspond à la solution actuelle de $x_2 = y_2 = 0$, et alors $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, avec $M = 6$.

On choisit maintenant la colonne de x_2. Les deux contraintes donnent alors $-x_2 \leq 3$ et $-2x_2 \leq 2$ comme restrictions sur x_2. Cependant, ni une ni l'autre n'est une contrainte. On peut donc augmenter x_2 autant qu'on veut. Cela veut dire qu'il n'existe pas de maximum et donc pas de solution optimale pour le programme linéaire.

(b) Faire un graphique correspondant au programme linéaire, indiquant la région faisable. Utiliser le graphique pour expliquer votre réponse dans partie (a).

Solution:



Le programme linéaire n'a pas de solution optimale parce que la région faisable n'est pas bornée dans la direction de croissance de l'objectif.

(c) Que peut-on dire de la région faisable du dual de ce programme linéaire ? Justifier votre réponse (c'est-à-dire, donner le théorème que vous utilisez).

Solution: Par le théorème 8.6 dans les notes de cours, on sait que la région faisable du dual est vide.

3. (11 points) Considérer le programme linéaire

$$\max\ x_1 + x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq -4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) Utiliser la méthode simplex pour solutionner le programme.

Solution: Il y a une constante négative, donc l'origine n'est pas dans la région faisable. On introduit une variable artificielle s pour la contrainte avec la constante négative. Afin de trouver une solution faisable au programme linéaire original, on résout le programme suivant :

$$\max\ -s \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - s \leq -4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases} \qquad x_1, x_2, s \geq 0.$$

On a donc le tableau suivant (ou $M' = -s$ est l'objectif temporaire), mais on veut que s soit une variable de base, c'est-à-dire qu'on veut que la colonne de s possède un pivot.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M' & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

On fait des opérations pour que le pivot soit réellement un pivot.

$$\left[\begin{array}{c||cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||cccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ \hline\hline 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

On lit la solution initiale :

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0,$$
$$y_2 = 8,\ s = 4,\ M' = -4.$$

On fait maintenant une méthode simplex ordinaire. On identifie la variable x_2 comme variable qui entre. Les deux contraintes sur x_2 sont $2x_2 \leq 4$ et $2x_2 \leq 8$. La première est plus restrictive. On a trouvé la position du prochain pivot et on fait des opérations de rangées pour qu'elle devienne pivot.

$$\left[\begin{array}{c||cccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ \hline\hline 0 & -1 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & -\frac{1}{2} & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

On a la solution actuelle :

$$x_1 = y_1 = s = 0,$$
$$x_2 = 2, y_2 = 4.$$

On ne peut pas augmenter M', car il n'y a aucune valeur négative dans la première rangée. On a trouvé une solution faisable avec x_2 et y_2 comme variables de base. Donc on retourne au programme initial, et on exige que les pivots soient dans les colonnes de x_2 et y_2.

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & \boxed{-2} & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \hline\hline 0 & -\frac{1}{2} & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right]$$

On a la solution actuelle :

$$x_1 = y_1 = 0,$$
$$x_2 = 2,\ y_2 = 4,\ M = 2.$$

La variable qui entre est x_1 et les deux contraintes sur x_1 sont $-\frac{1}{2}x_1 \leq 2$ et $2x_1 \leq 4$. La plus restrictive est la deuxième. On a trouvé la position du prochain pivot et on fait des opérations de rangées pour que ça devienne pivot.

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \hline\hline 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 5 \\ \hline\hline 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

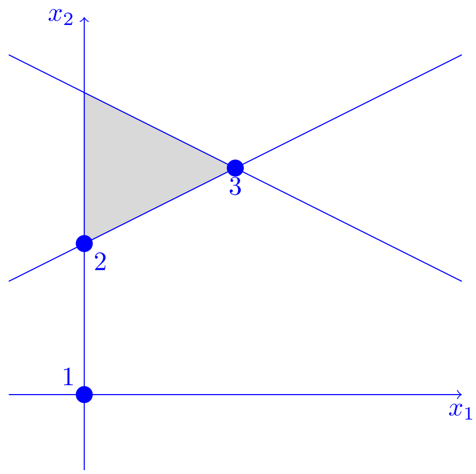
On lit la solution actuelle :

$$y_1 = y_2 = 0,$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ M = 5.$$

On ne peut plus augmenter M, donc c'est une solution optimale.

(b) Faire un graphique correspondant au programme linéaire, indiquant la région faisable. Indiquer les points intermédiaires (et le point final) obtenus avec la méthode simplex.

Solution:


x_2
x_1
1
2
3