MAT 2742, Automne 2011

Devoir 2

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 13 octobre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question. Vous pouvez utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour **vérifier** les calculs des valeurs et vecteurs propres, mais une réponse correcte sans justification vaut zéro points. Vous **pouvez** utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour calculer des produits matriciels et vectoriels.

1. (6 points) Considérez une suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ définit par l'équation de récurrence

$$b_k = b_{k-1} + 2b_{k-2}, \qquad b_0 = 0,\ b_1 = 1.$$

Donner une expression exacte pour b_k (qui n'implique pas les valeurs intermédiaires).

2. (6 points) Considérez une matrice de transition

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

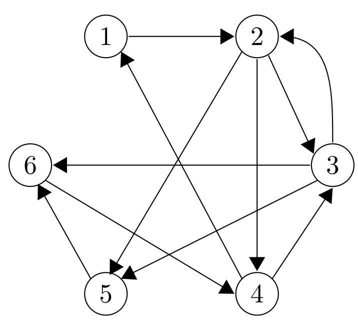
(a) Donner le graphe correspondant.

(b) Est-ce que le graphe est fortement connexe ? Est-ce que le graphe est apériodique ?

(c) En tentant divers puissances (par machine !), trouver une valeur de k telle que les colonnes de A^k sont toutes égales à deux décimales près. Comme réponse, donner la valeur de k que vous avez trouvée et une des colonnes (à deux décimales près).

(d) À l'aide de la question précédente, donner le vecteur d'état stationnaire (approximativement).

3. (6 points) Le graphe suivant représente un très petit internet, comprenant six pages web. Les flèches indiquent les liens.



(a) Considérons une chaîne de Markov basée sur ce mini-internet. À chaque page on choisit uniformément au hasard un des liens et on le suit. Donner la matrice P de transition de cette chaîne.

(b) Considérons une chaîne de Makov "paresseuse". À chaque page on a 1/3 de chance de rester à cette page, et le 2/3 qui reste est réparti également entre les liens qui sortent de cette page. Donner la matrice Q de transition de cette chaîne "paresseuse".

(c) Voici (à trois décimales près)

$$P^{16} \approx \begin{bmatrix} 0,121 & 0,115 & 0,118 & 0,115 & 0,122 & 0,119 \\ 0,174 & 0,181 & 0,174 & 0,177 & 0,167 & 0,183 \\ 0,179 & 0,173 & 0,177 & 0,176 & 0,182 & 0,174 \\ 0,230 & 0,237 & 0,237 & 0,239 & 0,237 & 0,231 \\ 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,119 & 0,117 & 0,116 \\ 0,179 & 0,177 & 0,177 & 0,174 & 0,175 & 0,178 \end{bmatrix}.$$

En regardant cette puissance matricielle, est-ce qu'on peut y déterminer le vecteur d'état stationnaire (à deux décimales près) ? Si oui le donner, et donner la page web la plus importante.

(d) Voici (à trois décimales près)

$$Q^{16} \approx \begin{bmatrix} 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,117 & 0,118 \\ 0,176 & 0,177 & 0,177 & 0,176 & 0,176 & 0,176 \\ 0,177 & 0,177 & 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,176 \\ 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 \\ 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 \\ 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,177 & 0.177 \end{bmatrix}.$$

En regardant cette puissance matricielle, est-ce qu'on peut y déterminer le vecteur d'état stationnaire (à deux décimales près) ? Si oui le donner, et donner la page web la plus importante.

4. (12 points) Une usine fabrique des voitures et des motocyclettes. Dans l'usine, il y a deux chaînes de montage (A et B). Fabriquer une voiture prend une heure à la chaîne A et trois heures à la chaîne B et utilise 300 kg d'acier. Fabriquer une motocyclette prend trois heures à la chaîne A et quatre heures à la chaîne B et utilise 100 kg d'acier. Chaque mois, la chaîne A peut être en opération au plus 120 heures et la chaîne B peut être en opération au plus 210 heures. En addition, l'usine a 16 500 kg d'acier disponibles chaque mois. Le profit sur chaque voiture est 2000 \$ et le profit sur chaque motocyclette est 1000 \$.

On veut savoir combien de voitures et combien de motocyclettes on devrait fabriquer chaque mois afin de maximiser le profit.

(a) Donner la fonction objective, ainsi que les contraintes à satisfaire.

(b) Donner le programme linéaire sous forme matricielle.

(c) Faire un graphique précis où l'axe horizontale indique le nombre de voitures, et l'axe verticale indique le nombre de motocyclettes. Inclure les droites de chaque contrainte et bien indiquer la région de faisabilité.

(d) Solutionner graphiquement pour l'optimum, à l'aide de votre graphique.

(e) Solutionner de façon analytique. C'est-à-dire, identifier les point extrêmes, et évaluer l'objectif à chacun. Donc, donner une solution optimale.