MAT 2742, Automne 2011

Devoir 2 – Solutions

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 13 octobre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question. Vous pouvez utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour **vérifier** les calculs des valeurs et vecteurs propres, mais une réponse correcte sans justification vaut zéro points. Vous **pouvez** utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour calculer des produits matriciels et vectoriels.

1. (6 points) Considérez une suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ définit par l'équation de récurrence

$$b_k = b_{k-1} + 2b_{k-2}, \qquad b_0 = 0,\ b_1 = 1.$$

Donner une expression exacte pour b_k (qui n'implique pas les valeurs intermédiaires).

Solution: On définie

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k \\ b_{k-1} \end{bmatrix}$$

et on résout l'équation

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \qquad \text{où} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Premièrement, on trouve les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. Pour chacune, on trouve les vecteurs propres. Pour $\lambda_1 = 2$, on a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est un vecteur propre correspondant à λ_1. Pour $\lambda_2 = -1$, on a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est un vecteur propre correspondant à λ_2.

On doit aussi écrire le vecteur initial $\mathbf{x}_1$ en termes des vecteurs propres :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

On forme la matrice augmentée et on fait une réduction par rapport aux lignes :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{2}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right].$$

Donc $c_1 = 1/3$ et $c_2 = -1/3$. Alors

$$\begin{bmatrix} b_k \\ b_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_k = A^{k-1}\mathbf{x}_1 = A^{k-1}\left(\frac{1}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_2\right) = \frac{1}{3}\lambda_1^{k-1}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{3}\lambda_2^{k-2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}2^{k-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(-1)^{k-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cela donne

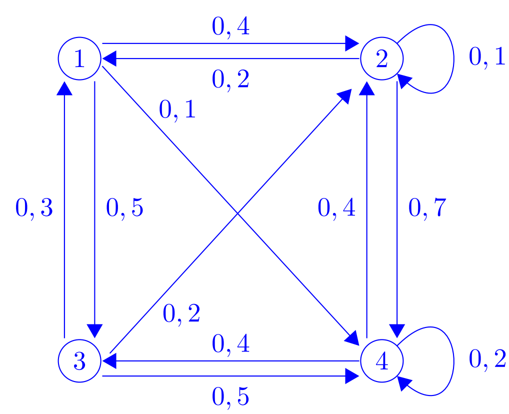
$$b_k = \frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{3}.$$

2. (6 points) Considérez une matrice de transition

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

(a) Donner le graphe correspondant.

Solution:



(b) Est-ce que le graphe est fortement connexe ? Est-ce que le graphe est apériodique ?

Solution: Oui, le graphe est fortement connexe et apériodique.

(c) En tentant divers puissances (par machine !), trouver une valeur de k telle que les colonnes de A^k sont toutes égales à deux décimales près. Comme réponse, donner la valeur de k que vous avez trouvée et une des colonnes (à deux décimales près).

Solution: Toutes les valeurs de k supérieures ou égales à 16 fonctionnent. À deux décimales près, les colonnes de A^{16} sont

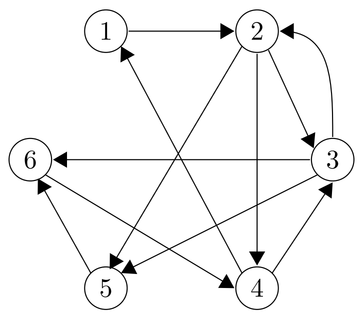
$$\begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,27 \\ 0,22 \\ 0,39 \end{bmatrix}.$$

(d) À l'aide de la question précédente, donner le vecteur d'état stationnaire (approximativement).

Solution: Puisque le graphe correspondant à A est fortement connexe et apériodique, Théorème 3.16 dans les notes de cours nous donne qu'il existe un seul vecteur d'état stationnaire $\mathbf{q}$, et pour tout vecteur d'état initial $\mathbf{x}_0$, les vecteurs d'état convergent vers $\mathbf{q}$. Comme on a vu en classe (voir la section 3.6 des notes), cela garantie que les colonnes de A^k convergent vers $\mathbf{q}$. Donc, à deux décimales près,

$$\mathbf{q} \approx \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,27 \\ 0,22 \\ 0,39 \end{bmatrix}.$$

3. (6 points) Le graphe suivant représente un très petit internet, comprenant six pages web. Les flèches indiquent les liens.



(a) Considérons une chaîne de Markov basée sur ce mini-internet. À chaque page on choisit uniformément au hasard un des liens et on le suit. Donner la matrice P de transition de cette chaîne.

Solution:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Considérons une chaîne de Makov "paresseuse". À chaque page on a $1/3$ de chance de rester à cette page, et le $2/3$ qui reste est réparti également entre les liens qui sortent de cette page. Donner la matrice Q de transition de cette chaîne "paresseuse".

Solution:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/9 & 2/9 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(c) Voici (à trois décimales près)

$$P^{16} \approx \begin{bmatrix} 0,121 & 0,115 & 0,118 & 0,115 & 0,122 & 0,119 \\ 0,174 & 0,181 & 0,174 & 0,177 & 0,167 & 0,183 \\ 0,179 & 0,173 & 0,177 & 0,176 & 0,182 & 0,174 \\ 0,230 & 0,237 & 0,237 & 0,239 & 0,237 & 0,231 \\ 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,119 & 0,117 & 0,116 \\ 0,179 & 0,177 & 0,177 & 0,174 & 0,175 & 0,178 \end{bmatrix}.$$

En regardant cette puissance matricielle, est-ce qu'on peut y déterminer le vecteur d'état stationnaire (à deux décimales près) ? Si oui le donner, et donner la page web la plus importante.

Solution: Non, on ne peut pas déterminer le vecteur d'état stationnaire en regardant cette puissance matricielle parce que les colonnes ne sont pas égales à deux décimales près.

(d) Voici (à trois décimales près)

$$Q^{16} \approx \begin{bmatrix} 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,117 & 0,118 \\ 0,176 & 0,177 & 0,177 & 0,176 & 0,176 & 0,176 \\ 0,177 & 0,177 & 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,176 \\ 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 & 0,235 \\ 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 & 0,118 \\ 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,176 & 0,177 & 0.177 \end{bmatrix}.$$

En regardant cette puissance matricielle, est-ce qu'on peut y déterminer le vecteur d'état stationnaire (à deux décimales près) ? Si oui le donner, et donner la page web la plus importante.

Solution: Les colonnes sont égales à deux décimales près. On peut conclure que le vecteur d'état stationnaire est à peu près

$$\begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,18 \\ 0,18 \\ 0,24 \\ 0,12 \\ 0,18 \end{bmatrix}.$$

Donc page 4 est la plus importante.

4. (12 points) Une usine fabrique des voitures et des motocyclettes. Dans l'usine, il y a deux chaînes de montage (A et B). Fabriquer une voiture prend une heure à la chaîne A et trois heures à la chaîne B et utilise 300 kg d'acier. Fabriquer une motocyclette prend trois heures à la chaîne A et quatre heures à la chaîne B et utilise 100 kg d'acier. Chaque mois, la chaîne A peut être en opération au plus 120 heures et la chaîne B peut être en opération au plus 210 heures. En addition, l'usine a 16 500 kg d'acier disponibles chaque mois. Le profit sur chaque voiture est 2000 $ et le profit sur chaque motocyclette est 1000 $.

On veut savoir combien de voitures et combien de motocyclettes on devrait fabriquer chaque mois afin de maximiser le profit.

(a) Donner la fonction objective, ainsi que les contraintes à satisfaire.

Solution: Soit x_1 le nombre de voitures et x_2 le nombre de motocyclettes. On cherche à maximiser le profit total, soit $2000x_1 + 1000x_2$. Les contraintes sont

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 120 && \text{(chaîne A)}, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 210 && \text{(chaîne B)}, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 165 && \text{(acier)}, \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$x_2 \geq 0.$$

(Notez qu'on a diviser l'inégalité pour l'acier par 100.)

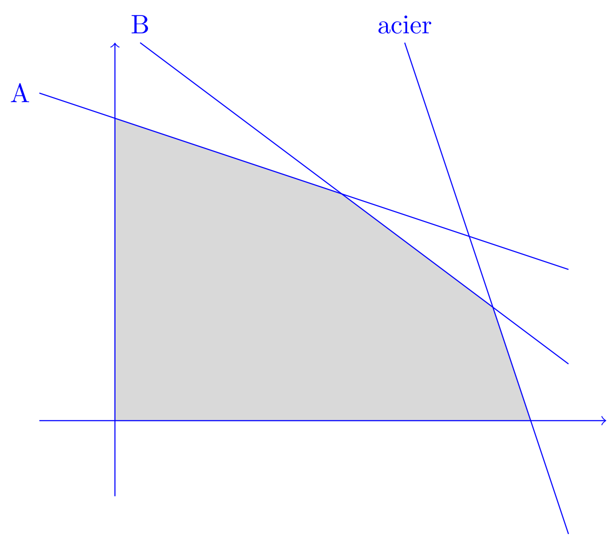
(b) Donner le programme linéaire sous forme matricielle.

Solution:

$$\max \begin{bmatrix} 2000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{s.c.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 120 \\ 210 \\ 165 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

(c) Faire un graphique précis où l'axe horizontale indique le nombre de voitures, et l'axe verticale indique le nombre de motocyclettes. Inclure les droites de chaque contrainte et bien indiquer la région de faisabilité.

Solution:



(d) Solutionner graphiquement pour l'optimum, à l'aide de votre graphique.

Solution: Les droites de profit constant sont en pointillé. La droite de zéro profit est donné par l'équation $2000x_1 + 1000x_2 = 0$, qui est la même que $2x_1 + x_2 = 0$. Les autres sont de la forme $2000x_1 + 1000x_2 = d$ pour divers valeurs de d. La valeur de d augmente dans la direction $(2, 1)$, tel qu'indiqué par la flèche. Le point P représente donc l'optimum. C'est l'intersection des contraintes 'B' et 'acier', donc la solution au système linéaire suivant.

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & = & 210 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 165 \end{array}$$

On résout le système par réduction par rapport aux lignes.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 210 \\ 3 & 1 & 165 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 210 \\ 0 & -3 & -45 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 210 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2}$$

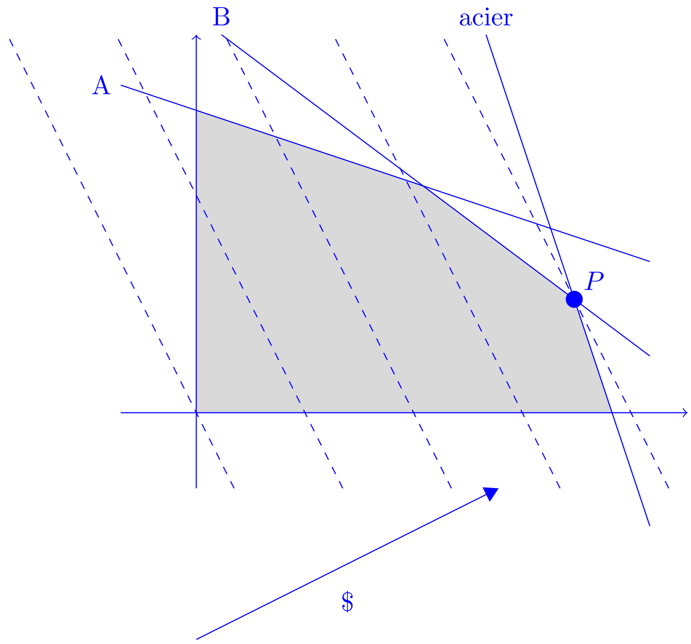
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Donc P est le point $(50, 15)$ et le profit à ce point (le profit maximal) est

$$2000(50) + 1000(15) = 115\,000,$$

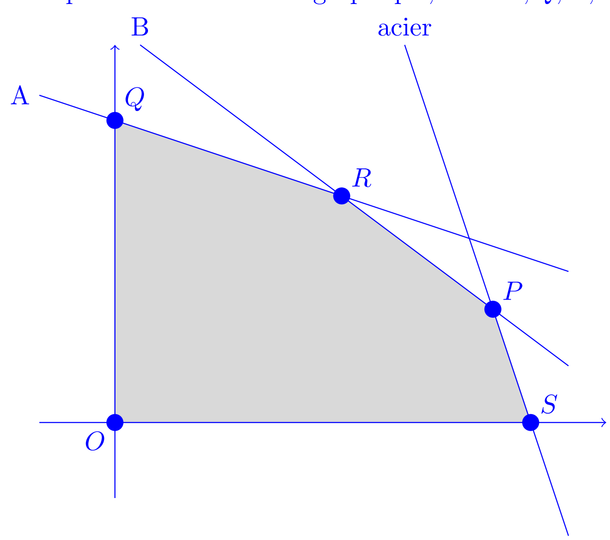
donc $115\,000\,\$$.

On peut conclure qu'afin d'augmenter le profit, on peut soit augmenter la capacité de la chaîne de montage B ou obtenir plus d'acier chaque mois, car ces deux options changerait le point P. Autrement dit, à l'optimum, la chaîne B marche à son maximum et l'acier est tout utilisé, mais la chaîne A a encore de la capacité inutilisée.



(e) Solutionner de façon analytique. C'est-à-dire, identifier les point extrêmes, et évaluer l'objectif à chacun. Donc, donner une solution optimale.

Solution: On trouve chaque sommet : dans le graphique, c'est P, Q, R, S, O.



Le point P est déjà connu : c'est l'intersection de $3x_1 + 4x_2 = 210$ et $3x_1 + x_2 = 165$, donc le point $(50, 15)$. Ce point donne un profit de $115\,000$ $

Le point Q est l'intersection de $x_1 + 3x_2 = 120$ et $x_1 = 0$, donc le point $(0, 40)$. Ce point donne un profit de $2000(0) + 1000(40) = 40\,000$ $.

Le point R est l'intersection de $x_1 + 3x_2 = 120$ et $3x_1 + 4x_2 = 210$, donc le point $(30, 30)$ (que vous pouvez trouver en résolvant le système linéaire comme on a fait pour P). Ce point donne un profit de $2000(30) + 1000(30) = 90\,000$ $.

Le point S est l'intersection de $3x_1 + x_2 = 165$ et $x_2 = 0$, donc le point $(55, 0)$. Ce point donne un profit de $2000(55) + 1000(0) = 110\,000$ \$.

Le point O est l'intersection de $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, donc le point $(0, 0)$. Ce point donne un profit de $2000(0) + 1000(0) = 0$ \$.

Le meilleur est P, donnant un profit de $115\,000$ \$ en fabriquant 50 voitures et 15 motocyclettes.