MAT 2742, Automne 2011

Devoir 1

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 29 septembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question. Vous pouvez utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour **vérifier** les calculs des valeurs et vecteurs propres, mais une réponse correcte sans justification vaut zéro points. Vous **pouvez** utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour calculer des produits matriciels et vectoriels.

1. Considérons trois populations dans une forêt : renards, souris, et chouettes. Soient R_k, S_k, et C_k les populations de renards, souris, et chouettes (en milliers) respectivement au mois k. Leurs populations sont liées de la façon suivante.

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= 0,6R_k + 0,2S_k \\ S_{k+1} &= -0,6R_k + 1,4S_k \\ C_{k+1} &= -0,4R_k + 0,4S_k + 0,8C_k \end{aligned}$$

Les populations initiales sont $C_0 = 45$, $S_0 = 85$, et $R_0 = 55$.

(a) (1 point) Donner la matrice de transition de ce modèle.

(b) (2 points) Déterminer les populations exactes après trois mois, selon ce modèle. Vous pouvez utiliser un solveur pour calculer des produits matriciels.

(c) (3 points) Déterminer les valeurs propres de la matrice de transition ainsi que leurs multiplicités.

(d) (4 points) Déterminer une base pour chaque espace propre de la matrice de transition.

(e) (2 points) Diagonaliser A, c'est-à-dire trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Expliquer comment vous savez que c'est une décomposition valide (vous pouvez utiliser un théorème donné en classe).

(f) (3 points) Exprimer le vecteur des populations initiales en termes des vecteurs propres.

(g) (2 points) Donner une expression exacte pour le vecteur des populations après k mois en termes de valeurs et vecteurs propres de la matrice.

(h) (2 points) Donner le comportement à long terme. Est-ce que les populations se stabilisent, disparaissent, ou augmentent ?

2. On donne les valeurs et vecteurs propres de la matrice de transition. Déterminer si éventuellement les populations se stabiliseront, disparaîtront, ou augmenteront. Déterminer le rapport éventuel entre les deux populations, en présumant que le vecteur initial n'est pas un vecteur propre (ni le vecteur nul).

(a) (2 points) $\lambda_1 = -0,7$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) (2 points) $\lambda_1 = 0,6$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = 0,1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) (2 points) $\lambda_1 = 1,4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = -0,5$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.