MAT 2742, Automne 2011

Devoir 1

Professeur : Alistair Savage

Date de remise : 29 septembre 2011 à 10h00

Vous devez montrer votre travail pour chaque question. Vous pouvez utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour **vérifier** les calculs des valeurs et vecteurs propres, mais une réponse correcte sans justification vaut zéro points. Vous **pouvez** utiliser des logiciels ou solveurs quelconques pour calculer des produits matriciels et vectoriels.

1. Considérons trois populations dans une forêt : renards, souris, et chouettes. Soient R_k, S_k, et C_k les populations de renards, souris, et chouettes (en milliers) respectivement au mois k. Leurs populations sont liées de la façon suivante.

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= 0,6R_k + 0,2S_k \\ S_{k+1} &= -0,6R_k + 1,4S_k \\ C_{k+1} &= -0,4R_k + 0,4S_k + 0,8C_k \end{aligned}$$

Les populations initiales sont $C_0 = 45$, $S_0 = 85$, et $R_0 = 55$.

(a) (1 point) Donner la matrice de transition de ce modèle.

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 1,4 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

(b) (2 points) Déterminer les populations exactes après trois mois, selon ce modèle. Vous pouvez utiliser un solveur pour calculer des produits matriciels.

Solution: Soit

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} R_k \\ S_k \\ C_k \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\mathbf{x}_3 = A^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 1,4 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 55 \\ 85 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46,4 \\ 98,24 \\ 59,52 \end{bmatrix}.$$

Donc les populations de renards, souris, et chouettes sont 46 400, 98 240, et 59 520 (respectivement).

(c) (3 points) Déterminer les valeurs propres de la matrice de transition ainsi que leurs multiplicités.

Solution: Premièrement, on calcule le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 0,6-\lambda & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 1,4-\lambda & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (0,6-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1,4-\lambda & 0 \\ 0,4 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} - 0,2\det \begin{bmatrix} -0,6 & 0 \\ -0,4 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (0,6-\lambda)(1,4-\lambda)(0,8-\lambda) - 0,2(-0,6)(0,8-\lambda) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\lambda - 0,8)\big((0,6-\lambda)(1,4-\lambda) + 0,12\big)\\
&= -(\lambda - 0,8)(\lambda^2 - 2\lambda + 0,96)\\
&= -(\lambda - 0,8)(\lambda - 1,2)(\lambda - 0,8).
\end{aligned}
$$

Donc les valeurs propre de A sont $0,8$ (avec multiplicité 2) et $1,2$ (avec multiplicité 1).

(d) (4 points) Déterminer une base pour chaque espace propre de la matrice de transition.

Solution: Pour la valeur propre $\lambda = 0,8$, on doit résoudre l'équation $(A - 0,8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$
A - 0,8I = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 0,6 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -5R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0,6 & 0,6 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 0,4R_1]{R_2 \to R_2 + 0,6R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

En forme d'équation, on a

$$x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2.$$

Donc, la solution générale est

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R},
$$

et une base pour l'espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda = 0,8$ est

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Pour la valeur propre $\lambda = 1,2$, on calcule

$$
A - 1,2I = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 0,2 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & -0,4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

En forme d'équation, on a :

$$
\begin{array}{rcrcl} x_1 & & - \; 0,5x_3 & = & 0 \\ & x_2 & - \; 1,5x_3 & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0,5x_3 \\ x_2 & = & 1,5x_3 \end{array}
$$

Donc la solution générale est

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,5x_3 \\ 1,5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R},
$$

et une base pour l'espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda = 1,2$ est

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.
$$

(e) (2 points) Diagonaliser A, c'est-à-dire trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Expliquer comment vous savez que c'est une décomposition valide (vous pouvez utiliser un théorème donné en classe).

Solution: Puisque la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, par Théorème 1.11 dans les notes de cours on a que $A = PDP^{-1}$ où

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix}.
$$

Notez que d'autres réponses sont possibles, par exemple, avec d'autres bases ou en mettant $\lambda = 1,2$ en premier...

(f) (3 points) Exprimer le vecteur des populations initiales en termes des vecteurs propres.

Solution: On résout

$$\begin{bmatrix} 55 \\ 85 \\ 45 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 55 \\ 1 & 0 & 3 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 55 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 55 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 55 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Alors la solution est $c_1 = 40$, $c_2 = 15$, $c_3 = 20$ et donc

$$\begin{bmatrix} 55 \\ 85 \\ 45 \end{bmatrix} = 40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(g) (2 points) Donner une expression exacte pour le vecteur des populations après k mois en termes de valeurs et vecteurs propres de la matrice.

Solution:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 &= A^k \left(40 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= 40A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 15A^k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 15A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 40(0,8)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 15(0,8)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 15(1,2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(h) (2 points) Donner le comportement à long terme. Est-ce que les populations se stabilisent, disparaissent, ou augmentent ?

Solution: Éventuellement le $(0,8)^k$ tend vers zéro, laissant seulement le dernier terme. Donc à long terme le vecteur des populations approche

$$15(1,2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et donc augmentent.

2. On donne les valeurs et vecteurs propres de la matrice de transition. Déterminer si éventuellement les populations se stabiliseront, disparaîtront, ou augmenteront. Déterminer le rapport éventuel entre les deux populations, en présumant que le vecteur initial n'est pas un vecteur propre (ni le vecteur nul).

(a) (2 points) $\lambda_1 = -0,7$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution: La valeur propre dominante est $\lambda_2 = 1$. Le vecteur des populations tend alors vers $c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour une constante c_2, donc se stabilise. Le rapport éventuel des deux populations sera $1 : 1$ (c.-à.-d. les deux populations tendent vers le même nombre).

(b) (2 points) $\lambda_1 = 0,6$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = 0,1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution: La valeur propre dominante est $\lambda_1 = 0,6$. Le vecteur des populations tend alors vers $c_1(0,6)^k \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ pour une constante c_2, donc les populations disparaissent. Le rapport éventuel des deux population sera $2 : 3$.

(c) (2 points) $\lambda_1 = 1,4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\lambda_2 = -0,5$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solution: La valeur propre dominante est $\lambda_1 = 1,4$. Le vecteur des populations tend alors vers $c_1(1,4)^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour une constante c_1, donc les populations augmentent. Le rapport éventuel des deux populations sera $2 : 1$.