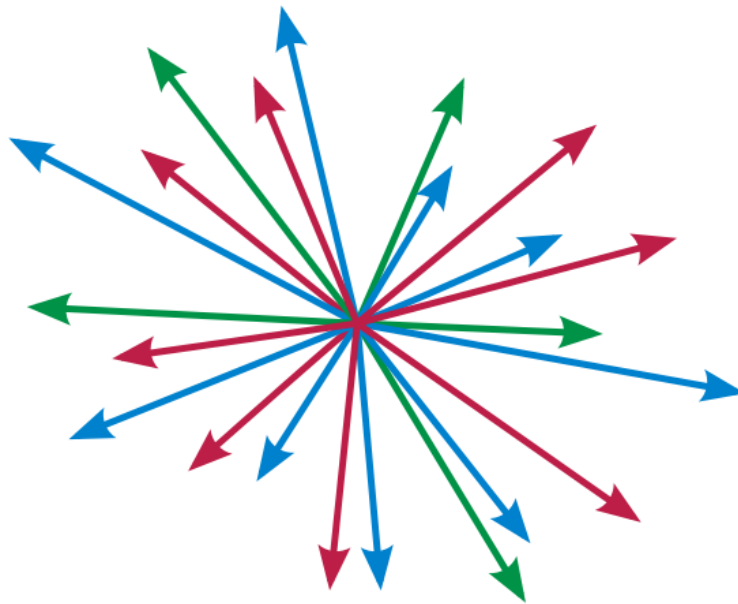


# Algèbre linéaire I

MAT 2541

AUTOMNE 2022



ALISTAIR SAVAGE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ D'OTTAWA

(Traduit en français par Simon Henry)

Ce travail est sous licence  
[Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

# Table des matières

<b>Preface</b>	<b>4</b>
<b>1 Espaces vectoriels</b>	<b>5</b>
1.1 Corps	5
1.2 Espaces vectoriels	7
1.3 Quelques propriétés des espaces vectoriels	11
1.4 Combinaisons linéaires	14
1.5 Sous-espaces vectoriel	16
<b>2 Applications linéaires</b>	<b>22</b>
2.1 Définition et exemples	22
2.2 Noyau et image	26
2.3 Espaces vectoriels des applications linéaires	29
2.4 Isomorphismes	33
<b>3 Structure des espaces vectoriels</b>	<b>38</b>
3.1 Sous-espaces engendrés et familles génératrices	38
3.2 Dépendance/indépendance linéaire	40
3.3 Espaces vectoriels finiment engendrés	45
3.4 Base et dimension	47
3.5 Le théorème du rang	54
3.6 Dimensions des espaces des applications linéaires	57
3.7 Espace dual	59
<b>4 Matrices</b>	<b>65</b>
4.1 La matrice d'une application linéaire	65
4.2 Changement de bases et matrices similaires	69
4.3 Élimination gaussienne	73
4.4 Le rang d'une matrice	75
<b>5 Déterminants et applications multilinéaires</b>	<b>79</b>
5.1 Applications multilinéaires	79
5.2 Le déterminant	82
5.3 Caractériser les propriétés du déterminant	85
5.4 Autres propriétés du déterminant	88

<b>6</b>	<b>Espaces pré-euclidien</b>	<b>91</b>
6.1	Définitions . . . . .	91
6.2	Orthogonalité . . . . .	94
6.3	Adjoints . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Diagonalisation</b>	<b>107</b>
7.1	Vecteurs propres, valeurs propres et diagonalisation . . . . .	107
7.2	Critères de diagonalisation . . . . .	112
7.3	Opérateurs auto-adjoints et matrices symétriques . . . . .	115
7.4	Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints . . . . .	118
7.5	Transformation euclidienne . . . . .	124
<b>A</b>	<b>Un avant-goût de l'algèbre abstraite</b>	<b>128</b>
A.1	Opérations sur les ensembles . . . . .	128
A.2	Utilisation de parenthèses . . . . .	129
A.3	Éléments neutres . . . . .	131
A.4	Éléments inversibles . . . . .	132
A.5	Monoïdes . . . . .	134
A.6	Corps . . . . .	138
<b>B</b>	<b>Espaces quotients et premier théorème d'isomorphisme</b>	<b>143</b>
B.1	Relations d'équivalence et ensembles de quotients . . . . .	143
B.2	espaces vectoriels quotients . . . . .	148
B.3	Le premier théorème d'isomorphisme . . . . .	150
B.4	Une autre preuve du théorème du rang . . . . .	153
	<b>Index</b>	<b>156</b>

# Preface

Ce sont des notes de cours pour le cours *Algèbre linéaire I* (MAT 2541) à l'Université d'Ottawa. Dans ce cours, nous adopterons une approche plus abstraite de l'algèbre linéaire que celle de MAT 1741 (prérequis pour ce cours). Au lieu de travailler uniquement avec des nombres réels ou complexes, nous généraliserons au cadre où nos coefficients se situent dans un corps. Les nombres réels et les nombres complexes sont tous deux des exemples de corps, mais il en existe d'autres. Nous reviendrons sur des sujets familiers tels que les matrices, les applications linéaires, les déterminants et la diagonalisation, mais dans ce cadre plus général et à un niveau plus profond. Nous aborderons également des sujets plus avancés tels que les espaces duaux, les applications multilinéaires et les espaces pré-hilbertiens. Par rapport à MAT 1741, ce cours se concentrera davantage sur la justification des résultats et la rigueur mathématique plutôt que sur le calcul. Presque tous les résultats seront accompagnés d'une preuve et ont demandera aux étudiants de rédiger des preuves dans les devoirs et les examens.

Les annexes contiennent une introduction à l'algèbre abstraite et traitent des espaces vectoriel quotients, y compris le premier théorème d'isomorphisme. Ce matériel ne sera pas couvert dans le cours et est inclus ici uniquement pour l'étudiant intéressé qui souhaite approfondir le sujet.

*Notation* : Dans ce cours  $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  désigne l'ensemble des entiers positif ou nul . Si  $Y$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $X$ , alors

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

*Remerciement* : Certaines parties de ces notes sont basées sur des notes de cours de Barry Jessup, Daniel Daigle et Kirill Zainoulline.

[Alistair Savage](#)

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces vectoriels, qui constituent le sujet central du cours. Vous avez déjà étudié les espaces vectoriels dans MAT 1741, et une grande partie du contenu de ce chapitre devrait vous être familière. Le contenu ce chapitre correspondent à peu près à [Tre, §1.1, §1.2, §1.7].

### 1.1 Corps

Dans MAT 1741, vous avez fait de l’algèbre linéaire sur les nombres réels et les nombres complexes. En fait, l’algèbre linéaire peut se faire dans un contexte beaucoup plus général : On peut considérer les “scalaires” comme étant les éléments de n’importe quel objet mathématique appelé un *corps*. L’étude des corps est un sujet intéressant en soi, mais nous n’entreprendrons pas cette étude des corps dans ce cours. L’étudiant intéressé est renvoyé à l’annexe A.6 pour une discussion sur ce sujet.

Pour les besoins de ce cours, nous utiliserons le mot *corps* seulement pour signifier un “sous-corps des nombres complexes” ou “un corps fini”, que nous allons définir maintenant.

**Definition 1.1.1** (Sous-corps de  $\mathbb{C}$ ). Un *sous-corps* des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est un sous-ensemble  $F \subseteq \mathbb{C}$  qui

- (a) contient 1,
- (b) est fermé par addition (c’est-à-dire  $x + y \in F$  pour tout  $x, y \in F$ ),
- (c) est fermé par soustraction (c’est-à-dire  $x - y \in F$  pour tout  $x, y \in F$ ),
- (d) est fermé par multiplication (c’est-à-dire  $xy \in F$  pour tout  $x, y \in F$ ),
- (e) est fermé en prenant l’inverse multiplicatif d’un élément non nul (c’est-à-dire  $x^{-1} \in F$  pour tout  $x \in F, x \neq 0$ ).

**Definition 1.1.2** (corps finis). Soit  $p$  un nombre premier. Le *corps fini* avec  $p$  éléments est l’ensemble

$$\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

d’entiers modulo  $p$ , avec son addition et sa multiplication habituelles :

$$\bar{x} + \bar{y} = \text{reste après division de } x + y \text{ par } p,$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \text{reste après division de } x \cdot y \text{ par } p.$$

Tant que le contexte est clair, nous omettons parfois les barres et, par exemple, écrivons 2 au lieu de  $\bar{2}$ .

*Exemple 1.1.3.* (Le corps  $\mathbb{F}_2$ ) Nous avons  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ , où  $0 \neq 1$ . Les opérations  $+$  et  $\cdot$  sur  $F$  sont définies par :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

*Exemple 1.1.4.* Dans  $\mathbb{F}_5$ , nous avons

$$\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}, \quad \bar{2} + \bar{4} = \bar{1}, \quad -(\bar{2}) = \bar{3}, \quad \bar{2}^{-1} = \bar{3}.$$

*Remark 1.1.5.* Nous exigeons que  $p$  soit premier dans Définition 1.1.2 car nous voulons que tous les éléments non nuls d'un corps aient des inverses multiplicatifs. Voir Exercice 1.1.3.

Dans ce cours, le terme *corps* signifiera soit un sous-corps de  $\mathbb{C}$  soit un corps fini. (Voir Définition A.6.1 pour la définition plus générale d'un corps.)

*Exemples 1.1.6.* (a)  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  sont des corps.

(b) Les entiers  $\mathbb{Z}$  ne sont *pas* un corps car ils ne sont pas fermés par inverse d'un élément non nul.

(c) L'ensemble  $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  n'est *pas* un corps car il n'est pas fermé par soustraction.

*Exemple 1.1.7* (Le corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ). Soit

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Alors

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{R}.$$

Le fait que  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  découle du fait que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel. Le fait que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq \mathbb{R}$  découle, par exemple, du fait que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  (voir Exercice 1.1.2). Nous le laissons en exercice (Exercice 1.1.1) la preuve que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est un corps.

*Exemples 1.1.8.* (a)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  est également un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

(b)  $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . Nous avons  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(i) \subsetneq \mathbb{C}$  et  $\mathbb{Q}(i) \not\subseteq \mathbb{R}$ .

On écrit  $F^\times$  pour l'ensemble des éléments non nuls de  $F$ , c'est-à-dire

$$F^\times = F \setminus \{0\}.$$

Nous verrons que la plupart de l'algèbre linéaire que vous avez vue dans MAT 1741 peut être effectuée sur n'importe quel corps. C'est-à-dire que n'importe quel corps peut servir d'ensemble de « scalaires » dans les systèmes d'équations et les espaces vectoriels. Par exemple, on peut résoudre le système

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = 2 \\ x_1 & + & x_2 = 0 \end{array} \quad (1.1)$$

dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{F}_3$  (Exercice 1.1.4).

## Exercices.

1.1.1. Prouver que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , tel que défini dans l'Exemple 1.1.7 est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

1.1.2. Montrer que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  et donc  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  et  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  sont des corps différents. *Indice* : Démontrer le résultat par contradiction. Supposons que  $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$  pour certains  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Montrez que cela conduit à une contradiction, en utilisant le fait que  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  sont irrationnels.

1.1.3. Considérons l'ensemble  $\mathbb{F}_6$  d'entiers modulo 6, ainsi que la multiplication et l'addition de Définition 1.1.2. Montrer que  $\bar{2}$  n'a pas d'inverse multiplicatif.

1.1.4. Trouvez toutes les solutions du système (1.1) sur les corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{F}_3$ .

## 1.2 Espaces vectoriels

Pour la suite du chapitre,  $F$  est un corps.

**Définition 1.2.1** (Espace vectoriel). Un *espace vectoriel sur  $F$*  est

- un ensemble  $V$  (dont les objets sont appelés *vecteurs*),
- une opération binaire  $+$  sur  $V$  appelée *addition vectoriel*, et
- *multiplication scalaire* : pour chaque  $c \in F$  et  $v \in V$ , un élément  $cv \in V$ , appelé la *multiplication scalaire* de  $c$  et  $v$ ,

tel que les axiomes suivants soient satisfaits :

- (V1) Pour tout  $u, v \in V$ , nous avons  $u + v = v + u$ . (*commutativité de l'addition vectoriel*)
- (V2) Pour tout  $u, v, w \in V$ , nous avons  $(u + v) + w = u + (v + w)$ . (*associativité de l'addition vectoriel*)
- (V3) Il existe un élément  $\mathbf{0} \in V$  tel que, pour tout  $v \in V$ ,  $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$ . L'élément  $\mathbf{0}$  est unique et s'appelle le *vecteur nul*.
- (V4) Pour tout  $v \in V$ , il existe un élément  $-v \in V$  tel que  $v + (-v) = \mathbf{0}$ . L'élément  $-v$  est uniquement déterminé par  $v$  et est appelé l'*opposé*, ou l'*inverse additif* de  $v$ .
- (V5) Pour tous les  $a \in F$  et  $u, v \in V$ , nous avons  $a(u + v) = au + av$ . (*distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition vecteur*)
- (V6) Pour tous  $a, b \in F$  et  $v \in V$ , nous avons  $(a + b)v = av + bv$ . (*distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition de corps*)
- (V7) Pour tous  $a, b \in F$  et  $v \in V$ , nous avons  $a(bv) = (ab)v$ . (*compatibilité de la multiplication scalaire avec la multiplication de corps*)
- (V8) Pour tout  $v \in V$ , nous avons  $1v = v$ , où  $1$  désigne l'unité multiplicative de  $F$ . (*loi d'unité*)

*Remark 1.2.2* (Notation). Dans le cadre des espaces vectoriels, les éléments de  $F$  seront appelés *scalaires*. Certaines références utilisent des caractères gras pour les vecteurs (par exemple  $\mathbf{v}$ ), tandis que d'autres utilisent des flèches sur les vecteurs (par exemple  $\vec{v}$ ). Nous n'utiliserons en gras que le vecteur nul, pour le distinguer de l'élément nul  $0$  du corps  $F$ . En classe, nous écrirons  $\vec{0}$  pour le vecteur zéro (car le gras est difficile à écrire sur un tableau noir).

**Definition 1.2.3** (Espaces vectoriels réels et complexes). Lorsque  $F = \mathbb{R}$  dans la définition 1.2.1,  $V$  est appelé un *espace vectoriel*. Lorsque  $F = \mathbb{C}$  dans la définition 1.2.1,  $V$  est appelé un *espace vectoriel complexe*.

*Examples 1.2.4.* (a) Pour chaque entier strictement positif  $n$ ,  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel et  $\mathbb{C}^n$  est un espace vectoriel complexe. Ici, l'addition vecteur et la multiplication scalaire sont les opérations que vous avez apprises dans MAT 1741.

(b) Supposons que  $F$  est un corps. Pour chaque entier strictement positif  $n$ ,

$$F^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in F\}$$

est un espace vectoriel sur  $F$  avec des opérations définies par

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ c(x_1, \dots, x_n) &= (cx_1, \dots, cx_n),\end{aligned}$$

pour  $c, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in F$ . Les exemples précédents de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont des cas particuliers de cet exemple (où  $F = \mathbb{R}$  et  $F = \mathbb{C}$ ).

(c) Supposons que  $F$  est un corps. Alors pour les entiers strictement positif  $m$  et  $n$ ,

$$M_{m,n}(F) = \{A \mid A \text{ est une matrice } m \times n \text{ avec des entrées dans } F\}$$

est un espace vectoriel sur  $F$  avec les opérations habituelles d'addition matricielle et de multiplication scalaire. Notez que la multiplication matricielle ne joue aucun rôle lorsque nous considérons  $M_{m,n}(F)$  comme un espace vectoriel.

(d) En plus d'être un espace vectoriel complexe,  $\mathbb{C}$  est *aussi* un espace vectoriel réel. Voir Exercice 1.2.1. De plus,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont tous deux des espaces vectoriels sur  $\mathbb{Q}$ .

Pour l'exemple suivant, rappelons que deux fonctions  $f, g: X \rightarrow Y$  sont *égal*, et on écrit  $f = g$ , si  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in X$  (voir Définition A.5.4).

*Example 1.2.5* (Espaces fonctionnels). Supposons que  $X$  est un ensemble non vide et que  $F$  est un corps. Soit  $\mathcal{F}(X, F)$  où  $F^X$  l'ensemble des fonctions de  $X$  à  $F$  (c'est-à-dire les fonctions défini sur  $X$  et à valeur dans  $F$ ). Lorsque  $X = F$ , nous écrivons parfois  $\mathcal{F}(F)$  au lieu de  $\mathcal{F}(F, F)$ . Si  $f, g \in \mathcal{F}(X, F)$  et  $c \in F$ , on définit les fonctions  $f + g, cf \in \mathcal{F}(X, F)$  par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad \forall x \in X.$$

Nous définissons donc l'addition et la multiplication scalaire point par point. Soit  $\mathbf{0} \in \mathcal{F}(X, F)$  la fonction définie par  $\mathbf{0}(x) = 0$  pour tout  $x \in X$  (notez la différence importante entre le zéro *fonction* et le *nombre zéro*). Pour  $f \in \mathcal{F}(X, F)$ , définissez  $-f \in \mathcal{F}(X, F)$



par  $(-f)(x) = -f(x)$  pour tout  $x \in X$ . Avec ces définitions,  $\mathcal{F}(X, F)$  est un espace vectoriel sur  $F$ .

Par exemple, nous pouvons vérifier l'axiome de distributivité comme suit : Pour tout  $f, g \in \mathcal{F}(X, F)$  et  $c \in F$ , nous devons montrer que  $c(f + g) = cf + cg$ . Ces deux fonctions sont égales si elles sont égales en tous points de  $X$ , c'est-à-dire si

$$(c(f + g))(x) = (cf + cg)(x) \quad \forall x \in X.$$

Maintenant, puisque nous savons que la distributivité est vraie dans le corps  $F$ , pour tout  $x \in X$  nous avons

$$(c(f+g))(x) = c(f+g)(x) = c(f(x)+g(x)) = cf(x)+cg(x) = (cf)(x)+(cg)(x) = (cf+cg)(x).$$

Ainsi  $c(f + g) = cf + cg$  et donc l'axiome de distributivité de la Définition 1.2.1 est vérifié. Nous laissons en exercice (Exercice 1.2.2) la vérification des axiomes restants de la Définition 1.2.1.

*Exemple 1.2.6* ( $C^\infty(\mathbb{R})$ ). Considérez le corps  $F = \mathbb{R}$ . Soit

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ a des dérivées de tous les ordres}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Comme dans l'exemple 1.2.5, nous définissons l'addition et la multiplication scalaire point par point. Par exemple,

$$\sin x, \cos x, e^x, x^2 + x^3 \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

puisque ces fonctions ont des dérivées de tous ordres (elles sont *infinitement différentiable*). Nous affirmons que  $C^\infty(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Tout d'abord, il faut se demander si les opérations d'addition et de multiplication scalaire sont bien définies sur l'ensemble  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Mais nous savons par les cours d'analyse que si les dérivées  $n$ -ième de  $f$  et  $g$  existent, alors les dérivées  $n$ -ième de  $f + g$  et  $cf$  existent aussi, pour tout  $c \in \mathbb{R}$  (nous avons  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$  et  $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$ ). Ainsi,  $C^\infty(\mathbb{R})$  est *fermé* par l'addition et la multiplication scalaire et donc les opérations sont bien définies.

Ensuite, nous devons vérifier que les axiomes de Définition 1.2.1 sont satisfaits. Puisque la fonction nulle  $\mathbf{0}$  est infiniment différentiable ( $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{0}'' = \mathbf{0}$ , etc.), nous avons  $\mathbf{0} \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Les axiomes de la définition 1.2.1 sont alors vrais puisqu'ils sont vrais dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Ainsi  $C^\infty(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

*Exemple 1.2.7*. Soit  $F = \mathbb{R}$  et

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = \mathbf{0}\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Par exemple, si  $f(x) = \sin x$ , alors  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ , etc.

$$f''(x) + f(x) = -\sin x + \sin x = \mathbf{0},$$

et donc  $\sin x \in V$ . Pour montrer que  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , nous devons montrer qu'il est fermé par addition et multiplication scalaire (alors le reste des axiomes de Définition 1.2.1 découleront du fait que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel). Si  $f, g \in V$ , alors

$$(f + g)'' + (f + g) = f'' + g'' + f + g = (f'' + f) + (g'' + g) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

et donc  $f + g \in V$ . Ainsi  $V$  est fermé par addition. Maintenant, si  $f \in V$  et  $c \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$(cf)'' + cf = cf'' + cf = c(f'' + f) = c\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

et donc  $cf \in V$ . Ainsi  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

*Exemple 1.2.8* (Polynômes). Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F) &= \{p \mid p \text{ est un polynôme à coefficients dans } F\} \\ &= \{p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in F \forall i\}. \end{aligned}$$

Ici  $t$  est une “indéterminée” ou “variable” (un symbole formel qui est manipulé comme s’il s’agissait d’un nombre). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(F) &= \{p \in \mathcal{P}(F) \mid p = 0 \text{ ou } \deg p \leq n\} \\ &= \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_i \in F \text{ pour tous } i\} \subseteq \mathcal{P}(F). \end{aligned}$$

Notez la différence entre  $\mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}_n(F)$ . Les éléments de  $\mathcal{P}(F)$  sont des polynômes de *n’importe quel* degré et les éléments de  $\mathcal{P}_n(F)$  sont des polynômes de degré au plus  $n$ .  $\mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}_n(F)$  sont tous deux des espaces vectoriels sur  $F$ .

*Remark 1.2.9.* Un polynôme  $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$  définit une fonction  $p : F \rightarrow F$ . Plus précisément,  $p(t)$  définit la fonction qui mappe  $c \in F$  à  $p(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$ . Il y a une différence subtile entre le *polynôme*  $p(t)$  et la *fonction polynomiale*  $p$ . Par exemple, si  $F = \mathbb{F}_2$ , alors les polynômes

$$t^2 + t \quad \text{et} \quad 0$$

sont différents, mais ils définissent tous les deux la fonction zéro. Si le corps  $F$  est infini, alors deux polynômes sont égaux si et seulement s’ils définissent la même fonction.

*Exemple 1.2.10* (Suites infinies). Supposons que  $F$  est un corps. Soit

$$V = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in F \forall i\}$$

l’ensemble de toutes les suites infinies d’éléments de  $F$ . Nous définissons l’addition et la multiplication scalaire composantes par composantes. C’est-à-dire,

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

et

$$c(a_1, a_2, \dots) = (ca_1, ca_2, \dots)$$

pour  $(a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \in V, c \in F$ . Nous laissons en exercice (Exercice 1.2.5) la preuve que  $V$  est un espace vectoriel sur  $F$ .

**Definition 1.2.11** (espace vectoriel produit). Supposons que  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . On définit

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

On écrit  $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  si  $v_i = w_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Nous définissons l'addition et la multiplication scalaire par composant :

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n), \\ c(v_1, v_2, \dots, v_n) &= (cv_1, cv_2, \dots, cv_n), \end{aligned}$$

pour  $(v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_n) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  et  $c \in F$ . Nous appelons  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  le *espace vectoriel du produit* de  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Voir Exercice 1.2.6.

## Exercices.

1.2.1. Vérifiez que les conditions de la définition 1.2.1 sont satisfaites avec  $V = \mathbb{C}$  et  $F = \mathbb{R}$ .

1.2.2. Vérifiez les axiomes restants de la définition 1.2.1 dans l'exemple 1.2.5.

1.2.3. Montrer que  $\mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}_n(F)$  sont des espaces vectoriel sur  $F$ .

1.2.4. Fixer un entier strictement positif  $n$ . Pourquoi l'ensemble

$$\{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in F \text{ pour tous } i, a_n \neq 0\}$$

de polynômes de degré exactement  $n$  n'est pas un espace vectoriel sur  $F$ ?

1.2.5. Montrez que  $V$ , tel que défini dans l'exemple 1.2.10 est un espace vectoriel.

1.2.6. Montrez que l'espace vectoriel produit (Définition 1.2.11) est en fait un espace vectoriel sur  $F$ . Autrement dit, montrez qu'il satisfait les axiomes de la définition 1.2.1. Vous devrez utiliser le fait que chaque  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est un espace vectoriel sur  $F$ .

1.2.7 ([Ber14, Ex. 1.3.4]). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel. Soit  $W = V \times V$  l'espace vectoriel produit (réel) et définissons la multiplication des scalaires complexes par la formule

$$(a + bi)(u, v) = (au - bv, bu + av), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (u, v) \in W.$$

Montrer que  $W$  est un espace vectoriel complexe .

## 1.3 Quelques propriétés des espaces vectoriels

Dans cette section, nous déduisons quelques propriétés de base des espaces vectoriels qui seront utilisées tout au long du cours.

**Theorem 1.3.1.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur le corps  $F$ .*

(a) *Si  $\mathbf{0}' \in V$  est un vecteur tel que  $\mathbf{0}' + v = v$  pour tout  $v \in V$ , alors  $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ . En d'autres termes, le vecteur zéro est unique.*

- (b) Si  $v + w = \mathbf{0}$  pour certains  $v, w \in V$ , alors  $w = -v$ . Autrement dit, l'inverse additif d'un vecteur est unique (ou, l'opposé d'un vecteur est unique).
- (c) Pour tout  $v \in V$ , nous avons  $-(-v) = v$ .
- (d) Pour tout  $v \in V$ , nous avons  $0v = \mathbf{0}$ .
- (e) Pour tout  $c \in F$ ,  $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

*Démonstration.* Pour prouver (d), notez que

$$0v + 0v = (0 + 0)v = 0v = 0v.$$

L'ajout de  $-0v$  aux deux côtés donne alors

$$0v + 0v + (-0v) = 0v + (-0v) \implies 0v = \mathbf{0}.$$

Nous laissons la preuve des autres affirmations en Exercice (1.3.1). □

**Corollary 1.3.2.** Pour tout vecteur  $v$  et scalaire  $c$ , nous avons

$$c(-v) = -(cv) = (-c)v.$$

*Démonstration.* Pour prouver la première égalité, notons que

$$c(-v) + cv = c(-v + v) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ainsi  $c(-v) = -cv$  par l'unicité des opposés (Théorème 1.3.1(b)). De la même façon,

$$cv + (-c)v = (c - c)v = 0v = \mathbf{0},$$

et donc  $(-c)v = -(cv)$  par l'unicité des négatifs. □

**Corollary 1.3.3.** Pour chaque vecteur  $v$ , nous avons  $(-1)v = -v$ .

*Démonstration.* Nous avons  $(-1)v = -(1v) = -v$ . □

**Theorem 1.3.4** (Le vecteur zéro n'a pas de diviseur). Soit  $V$  un espace vectoriel,  $v \in V$  et  $c$  un scalaire. Alors  $cv = \mathbf{0}$  si et seulement si  $c = 0$  ou  $v = \mathbf{0}$ .

*Démonstration.* Nous savons déjà du théorème 1.3.1 que si  $c = 0$  ou  $v = \mathbf{0}$ , alors  $cv = \mathbf{0}$ . Il reste donc à prouver que si  $cv = \mathbf{0}$ , alors  $c = 0$  ou  $v = \mathbf{0}$ . Supposons  $cv = \mathbf{0}$ . Soit  $c = 0$  ou  $c \neq 0$ . Si  $c = 0$ , alors nous avons terminé. Considérons donc le cas restant de  $c \neq 0$ . Alors, puisque  $c$  est un élément non nul d'un corps, il a un inverse multiplicatif. Multiplier les deux côtés de l'équation  $cv = \mathbf{0}$  par  $c^{-1}$  donne

$$c^{-1}cv = c^{-1}\mathbf{0} \implies 1v = \mathbf{0} \implies v = \mathbf{0}. \quad \square$$

**Corollary 1.3.5** (Lois d'annulation). Supposons que  $u, v$  sont des vecteurs et  $c, d$  sont des scalaires.

- (a) Si  $cu = cv$  et  $c \neq 0$ , alors  $u = v$ .
- (b) Si  $cv = dv$  et  $v \neq \mathbf{0}$ , alors  $c = d$ .

*Démonstration.* (a) Puisque  $c \neq 0$  et tous les éléments non nuls d'un corps ont des inverses multiplicatifs, nous pouvons multiplier les deux côtés de l'équation  $cu = cv$  par  $c^{-1}$  pour obtenir

$$c^{-1}(cu) = c^{-1}cv \implies (c^{-1}c)u = (c^{-1}c)v \implies 1u = 1v \implies u = v.$$

(b)  $cv = dv \implies cv + (-dv) = dv + (-dv) \implies (c - d)v = \mathbf{0}$ . Alors, depuis  $v \neq \mathbf{0}$ , on a  $c - d = 0$  par Théorème 1.3.4. Ajout de  $d$  des deux côtés donne  $c - d + d = 0 + d \implies c + 0 = d \implies c = d$ .

□

**Definition 1.3.6** (Soustraction de vecteurs). Pour les vecteurs  $u, v$ , on définit

$$u - v = u + (-v).$$

## Exercices.

1.3.1. Compléter la preuve du Théorème 1.3.1.

1.3.2 ([Ber14, Ex. 1.4.1]). Montrer que, dans un espace vectoriel :

- (a)  $u - v = \mathbf{0}$  si et seulement si  $u = v$ ;
- (b)  $u + v = z$  si et seulement si  $u = z - v$ .

1.3.3 ([Ber14, Ex. 1.4.2]). Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $F$ .

- (a) Montrer que si  $v \in V$  est un vecteur fixe non nul, alors l'application  $f: F \rightarrow V$  définie par  $f(c) = cv$  est injective.
- (b) Montrer que si  $c$  est un scalaire fixe non nul, alors l'application  $g: V \rightarrow V$  définie par  $g(v) = cv$  est bijective.

Vous devez utiliser directement la définition des applications injectives et bijectives, et *ne pas* utiliser toutes les propriétés des applications linéaires (un sujet que nous n'avons pas encore abordé).

1.3.4 ([Ber14, Ex. 1.4.3]). Supposons que  $v$  est un vecteur fixe dans un espace vectoriel  $V$ . Prouver que la cartographie

$$\tau: V \rightarrow V, \quad \tau(u) = u + v,$$

est bijective. (Cette application s'appelle *translation* par le vecteur  $v$ .)

1.3.5 ([Ber14, Ex. 1.4.4]). Prouver que si  $a$  est un scalaire non nul et  $v$  est un vecteur fixe dans un espace vectoriel  $V$ , alors l'équation  $ax + v = \mathbf{0}$  a une solution unique  $x \in V$ .

1.3.6. Supposons que, dans un espace vectoriel  $V$ , un vecteur  $u \in V$  ait la propriété que  $u + v = v$  pour *quelques*  $v \in V$ . Prouver que  $u = \mathbf{0}$ .

## 1.4 Combinaisons linéaires

**Definition 1.4.1** (Combinaison linéaire). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$ . Si  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  et  $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ , alors le vecteur

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

s'appelle une *combinaison linéaire* de  $v_1, v_2, v_n$ . Les scalaires  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sont appelés les *coefficients* de la combinaison linéaire.

*Exemple 1.4.2.* Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$2 \sin x - 3e^x + 5x^3 - 8|x|$$

est une combinaison linéaire des vecteurs  $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $x^3$  et  $|x|$ .

*Exemple 1.4.3* (Fonctions d'onde en physique). La théorie des espaces vectoriels joue un rôle important dans de nombreux domaines de la physique. Par exemple, en mécanique quantique, l'espace des fonctions d'onde qui décrivent l'état d'un système de particules est un espace vectoriel. Le *principe de superposition*, qu'un système puisse être dans une combinaison linéaire d'états, correspond au fait que dans les espaces vectoriels, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. C'est la théorie qui sous-tend l'expérience de pensée connue sous le nom du [Chat de Schrödinger](#).

**Definition 1.4.4** (sous-espace engendré). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur  $F$  et  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Alors

$$\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \mid c_1, \dots, c_n \in F\}$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  et s'appelle le *sous-espace engendré* par cet ensemble de vecteurs (on dit aussi parfois le "Span" comme en anglais pour aller plus vite). Lorsque nous souhaitons mettre l'accent sur le corps avec lequel nous travaillons (par exemple si nous travaillons avec plusieurs corps), nous écrivons  $\text{Span}_F\{v_1, \dots, v_n\}$ . Notez que [\[Tre\]](#) utilise la notation  $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_n\}$ .

La notation  $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$  est aussi assez courante (surtout dans les référence en français).

*Exemple 1.4.5.* Rappelez  $\mathcal{P}_n(F) = \{a_nt^n + \dots + a_0 \mid a_i \in F\}$  de l'exemple [1.2.8](#). Nous avons

$$\mathcal{P}_n(F) = \text{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^n\},$$

où ici 1 désigne le polynôme constant (correspondant à la fonction  $1(c) = 1$  pour tout  $c \in F$ ).

*Exemple 1.4.6.* Considérons l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . En utilisant les formules de somme trigonométrique, nous avons

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x.$$

Ainsi  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  est une combinaison linéaire de  $\cos x$  et  $\sin x$  et donc  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \text{Span}\{\cos x, \sin x\}$ .

*Exemples 1.4.7.* (a) Considérez  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Nous avons  $\mathbb{C} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{1\}$  puisque nous pouvons écrire  $z = z1$  pour n'importe quel  $z \in \mathbb{C}$ .

(b) Considérez  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Puis  $\mathbb{C} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i\}$ . Puisqu'on peut écrire *n'importe quel* nombre complexe comme  $a + bi$  pour certains *réel* nombres  $a, b$ .

(c) Considérez  $\mathbb{R}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . Puis  $\text{Span}_{\mathbb{Q}}\{1, \sqrt{2}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , le corps de Exemple 1.1.7.

*Exemple 1.4.8.* Considérons l'espace vectoriel  $F^n$  sur  $F$ , pour un certain corps  $F$ . Soit

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 0, 1).$$

Ainsi, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i$  a un 1 à la  $i$ -ième position et des zéros partout ailleurs. Alors

$$F^n = \text{Span}_F\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

puisque tout vecteur  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$  peut s'écrire

$$\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

Par conséquent, chaque vecteur dans  $F^n$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## Exercises.

1.4.1. Dans  $\mathbb{C}^4$ , exprimez le vecteur  $(2 + i, 3 - 7i, 0, -6)$  sous la forme d'une combinaison linéaire de  $e_1, e_2, e_3, e_4$  (voir Exemple 1.4.8).

1.4.2. Montrer que, dans tout espace vectoriel,  $u - v$  est une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .

1.4.3. Pour chacun des énoncés suivants, déduire si l'énoncé est vrai ou faux. Justifiez vos réponses.

- (a) Dans  $\mathbb{R}^3$ , le vecteur  $(3, 1, -7)$  est une combinaison linéaire de  $(1, 0, 1)$  et  $(2, 0, 3)$ .
- (b) Dans  $\mathbb{R}^3$ , le vecteur  $(3, 0, -7)$  est une combinaison linéaire de  $(1, 0, 1)$  et  $(2, 0, 3)$ .
- (c) Pour tout espace vectoriel  $V$  et  $u, v \in V$ , le vecteur  $u$  est une combinaison linéaire de  $u - v$  et  $u + v$ .

1.4.4 ([Ber14, Ex. 1.5.8]). Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{P}(F)$  (Exemple 1.2.8), soit

$$p(t) = 2t^3 - 5t^2 + 6t - 4, \quad q(t) = t^3 + 6t^2 + 3t + 5, \quad r(t) = 4t^2 - 3t + 7.$$

$r$  est-il une combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ ? Justifiez votre réponse.

## 1.5 Sous-espaces vectoriel

**Définition 1.5.1** (Sous-espace). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$ . Un sous-ensemble  $U \subseteq V$  est appelé un *sous-espace vectoriel* (ou plus simplement just un *sous-espace*) de  $V$  si

- (a)  $\mathbf{0} \in U$ ,
- (b)  $U$  est clos par addition vectoriel :  $u + v \in U$  pour tout  $u, v \in U$ .
- (c)  $U$  est fermé par multiplication scalaire :  $cu \in U$  pour tout  $u \in U$  et  $c \in F$ .

**Theorem 1.5.2** (Les sous-espaces sont des espaces vectoriel). *Si  $U$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ , alors  $U$  est un espace vectoriel.*

*Démonstration.* Par Définition 1.5.1, l'addition vecteur et la multiplication scalaire sont bien définies sur  $U$ . Puisque  $\mathbf{0} \in U$  et  $-v = (-1)v \in U$  pour tout  $v \in U$ , on voit que les axiomes (V3) et (V4) d'un espace vectoriel sont satisfaits.  $\square$

*Exemples 1.5.3.* (a) Si  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$ , alors  $\{\mathbf{0}\}$  et  $V$  sont tous deux des sous-espaces de  $V$ . Ceux-ci sont appelés les sous-espaces *triviaux*. Ils sont différents si  $V \neq \{\mathbf{0}\}$ .

- (b) Supposons  $A \in M_{m,n}(F)$ . Alors

$$\text{Ker } A = \{v \in F^n \mid Av = \mathbf{0}\}$$

est un sous-espace de  $F^n$ . On vérifie les axiomes de la définition 1.5.1. Depuis  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , nous avons  $\mathbf{0} \in \text{Ker } A$ . Si  $u, v \in \text{Ker } A$ , alors  $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$  et donc  $u + v \in \text{Ker } A$ . Si  $u \in \text{Ker } A$  et  $c \in F$ , alors  $A(cu) = c(Au) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$  et donc  $cu \in \text{Ker } A$ .

- (c) Considérez  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $\text{Span}_{\mathbb{R}}\{1\} = \mathbb{R}$  est un sous-espace de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (d) Considérez  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Alors les seuls sous-espaces sont  $\{\mathbf{0}\}$  et  $\mathbb{C}$ .
- (e) Plus généralement, pour tout corps  $F$ , on peut considérer  $F$  comme un espace vectoriel sur lui-même. Nous le laissons en exercice (Exercice 1.5.1) pour montrer que les seuls sous-espaces sont  $\{\mathbf{0}\}$  et  $F$ .
- (f) L'ensemble

$$V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}\},$$

n'est *pas* un sous-espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car il ne contient pas l'inverse additif de chaque élément de  $V$ . (Donc ce n'est pas un espace vectoriel, donc pas un sous-espace par le théorème 1.5.2.) Par exemple,  $f(x) = x^2$  est une fonction dans  $V$ , mais l'inverse additif  $-f$  est défini par  $(-f)(x) = -x^2$  et donc  $-f$  n'est pas dans  $V$  (puisque, par exemple  $(-f)(1) = -1 < 0$ ). L'ensemble  $V$  n'est pas non plus fermé par multiplication scalaire (voir Exercice 1.5.2).

- (g) L'ensemble  $C^\infty(\mathbb{R})$  est un sous-espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . L'ensemble

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = \mathbf{0}\}$$

est un sous-espace de  $C^\infty(\mathbb{R})$  et un sous-espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .



- (h) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n(F)$  est un sous-espace de  $\mathcal{P}(F)$ . Lorsque  $F = \mathbb{R}$ , si nous considérons les polynômes comme des polynômes *les fonctions*, alors  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $C^\infty(\mathbb{R})$  puisque les polynômes sont infiniment différentiables.
- (i) Pour un corps  $F$ , soit

$$W = \{p \in \mathcal{P}(F) \mid p(1) = 0\}.$$

On vérifie que  $W$  est un sous-espace de  $\mathcal{P}(F)$ . Depuis  $\mathbf{0}(1) = 0$ , nous avons  $\mathbf{0} \in W$ . Supposons  $p, q \in W$ , alors

$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0,$$

et donc  $p + q \in W$ . Enfin, si  $p \in W$  et  $c \in F$ , alors

$$(cp)(1) = cp(1) = c \cdot 0 = 0,$$

et donc  $cp \in W$ . Ainsi,  $W$  est bien un sous-espace de  $\mathcal{P}$ .

- (j) Pour un corps  $F$ , soit

$$V = \{p \in \mathcal{P}(F) \mid p(1) = 1\}.$$

Puisque  $\mathbf{0}(1) = 0 \neq 1$ ,  $\mathbf{0} \notin V$  et donc  $V$  n'est *pas* un sous-espace de  $\mathcal{P}(F)$ . L'ensemble  $V$  viole aussi les autres axiomes d'un sous-espace mais on peut s'arrêter là car dès qu'un ensemble viole *un* des axiomes, nous savons que ce n'est pas un sous-espace.

**Theorem 1.5.4.** *Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont des vecteurs dans un espace vectoriel  $V$ , alors  $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est un sous-espace de  $V$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est exactement comme la preuve du cas particulier où le corps est  $\mathbb{R}$  (que vous avez vu dans MAT 1741).  $\square$

**Definition 1.5.5** (Somme et intersection de sous-ensembles). Supposons que  $M$  et  $N$  sont des sous-ensembles d'un espace vectoriel  $V$  (notez qu'ils n'ont pas besoin d'être des sous-espaces). Nous définissons

$$M \cap N = \{v \in V \mid v \in M \text{ et } v \in N\}, \text{ et}$$

$$M + N = \{u + v \mid u \in M, v \in N\}.$$

Ceux-ci sont appelés l'*intersection* et la *somme* (respectivement) de  $M$  et  $N$ .

**Theorem 1.5.6.** *Si  $U$  et  $W$  sont sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$ , alors  $U \cap W$  et  $U + W$  sont également des sous-espaces.*

*Démonstration.* Montrons que  $U + W$  est un sous-espace. Comme  $\mathbf{0} \in U$  et  $\mathbf{0} \in W$ , on a ça

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in U + W.$$

Maintenant, nous montrons que  $U + W$  est fermé par addition vectoriel. Supposons que  $v = u + w$  et  $v' = u' + w'$  sont deux vecteurs dans  $U + W$  (c'est-à-dire  $u, u' \in U$  et  $w, w' \in W$ ). Alors

$$v + v' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w').$$

Puisque  $U$  est un sous-espace, il est fermé par addition vectoriel et donc  $u+u' \in U$ . De même, puisque  $W$  est un sous-espace,  $w+w' \in W$ . Ainsi  $v+v' \in U+W$ . Enfin, nous montrons que  $U+W$  est fermé par multiplication scalaire. Supposons que  $v = u+w \in U+W$  (avec  $u \in U$  et  $w \in W$ ). Alors

$$cv = c(u+w) = cu + cw.$$

Puisque  $U$  est un sous-espace, il est fermé par multiplication scalaire. Ainsi  $cu \in U$ . De même,  $cw \in W$ . Par conséquent,  $cv \in U+W$ . Nous avons donc montré que  $U+W$  est un sous-espace.

Nous laissons en exercice (Exercice 1.5.3) la preuve que  $U \cap W$  est un sous-espace de  $V$ . En fait, c'est aussi un sous-espace de  $U$  et  $W$  (car  $U \cap W \subseteq U$  et  $U \cap W \subseteq W$ ).  $\square$

*Exemple 1.5.7.* Supposons  $V = F^3$ ,  $U = \{(x, 0, 0) \mid x \in F\}$ ,  $W = \{(0, y, 0) \mid y \in F\}$ . Nous le laissons en exercice (Exercice 1.5.4) pour montrer que  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces de  $V$ , et que  $U+W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in F\}$  (qui est aussi un sous-espace). Notez que

$$\begin{aligned} U &= \text{Span}\{(1, 0, 0)\}, & W &= \text{Span}\{(0, 1, 0)\}, \\ U+W &= \text{Span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}, & U \cap W &= \{0\}. \end{aligned}$$

**Corollary 1.5.8.** *Supposons que  $U, W$  sont des sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$  sur  $F$ . Alors,*

- (a)  $U \cap W$  est le plus grand sous-espace de  $V$  contenu à la fois dans  $U$  et  $W$  (c'est-à-dire si  $X$  est un sous-espace de  $V$  tel que  $X \subseteq U$  et  $X \subseteq W$ , alors  $X \subseteq U \cap W$ ), et
- (b)  $U+W$  est le plus petit sous-espace de  $V$  contenant à la fois  $U$  et  $W$  (c'est-à-dire, si  $Y$  est un sous-espace de  $V$  tel que  $U \subseteq Y$  et  $W \subseteq Y$ , alors  $U+W \subseteq Y$ ).

*Démonstration.* (a) Supposons que  $X$  est un sous-espace de  $V$  tel que  $X \subseteq U$  et  $X \subseteq W$ . Puis  $X \subseteq U \cap W$  par la définition de l'intersection  $U \cap W$ .

(b) Supposons que  $Y$  est un sous-espace de  $V$  tel que  $U \subseteq Y$  et  $W \subseteq Y$ . Soit  $v \in U+W$ . puis  $v = u+w$  pour certains  $u \in U$  et  $w \in W$ . Comme  $u \in U \subseteq Y$ , nous avons  $u \in Y$ . De même,  $w \in W \subseteq Y$  implique  $w \in Y$ . Puisque  $Y$  est un sous-espace, il est fermé par addition vectoriel et donc  $v = u+w \in Y$ . Nous avons donc montré que chaque élément de  $U+W$  est un élément de  $Y$ . Donc  $U+W \subseteq Y$ .  $\square$

**Definition 1.5.9** (Somme directe). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel et que  $U, W$  sont des sous-espaces de  $V$  tels que

- (a)  $U \cap W = \{0\}$ , et
- (b)  $U+W = V$ .

On dit que  $V$  est la *somme directe* de  $U$  et  $W$  et écrivez  $V = U \oplus W$ .

*Exemple 1.5.10.* Supposons que  $F$  est un corps,  $V = F^2$ ,

$$U = \{(x, 0) \mid x \in F\}, \quad \text{et} \quad W = \{(0, x) \mid x \in F\}.$$

Alors  $U \cap W = \{0\}$  et  $U+W = V$  puisque tout vecteur  $(x, y) \in V$  peut être écrit comme  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in U+W$ . Ainsi  $V = U \oplus W$ . Parfois, cela s'écrit  $F^2 = F \oplus F$ , où nous avons identifié  $U$  et  $W$  avec  $F$  (en ne considérant que la composante non-nul).

**Theorem 1.5.11.** *Supposons que  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $V = U \oplus W$ ,
- (b) Pour chaque  $v \in V$ , il y a une unique pair d'éléments  $u \in U$  et  $w \in W$  tels que  $v = u + w$ .

*Démonstration.* Nous montrons d'abord que (a) implique (b). Donc on suppose (a) est vrai. Supposons  $v \in V$ . Puisque  $V = U + W$ , il existe  $u \in U$  et  $w \in W$  tel que  $v = u + w$ . Supposons maintenant que  $v = u' + w'$  pour certains  $u' \in U$  et  $w' \in W$ . Alors

$$\mathbf{0} = v - v = (u + w) - (u' + w') = (u - u') + (w - w') \implies u - u' = w' - w.$$

Maintenant  $u - u' \in U$  puisque  $U$  est un sous-espace (donc fermé par addition vectoriel et multiplication scalaire). De même,  $w' - w \in W$ . Donc  $u - u' \in U$  et  $u - u' = w' - w \in W$ . Ainsi  $u - u' \in U \cap W$ . Mais  $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ . Donc  $u - u' = \mathbf{0}$  et  $w' - w = u - u' = \mathbf{0}$ . Donc  $u = u'$  et  $w = w'$ . Par conséquent, la représentation de  $v$  sous la forme  $v = u + w$  est *unique*.

Nous laissons en exercice (Exercice 1.5.7) la preuve que (b) implique (a).  $\square$

Si  $U$ ,  $W$  et  $V$  satisfont les conditions équivalentes du Théorème 1.5.11, on dit que  $W$  est un *supplémentaire* à  $U$  dans  $V$ . Bien sûr, il s'ensuit que  $U$  est également un supplémentaire de  $W$ .

*Remark 1.5.12.* Pour montrer que  $S$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $F$ , il suffit que  $\mathbf{0} \in S$  et

$$u, v \in S, c, d \in F \implies cu + dv \in S.$$

Pourquoi? Prenez  $c = d = 1$  pour voir que  $S$  est fermé sous l'addition vectoriel, puis prenez  $d = 0$  pour voir que  $S$  est fermé sous la multiplication scalaire.

## Exercises.

1.5.1. Supposons que  $F$  est un corps et considérons  $F$  comme un espace vectoriel sur lui-même. Montrez que les seuls sous-espaces sont  $\{0\}$  et  $F$ .

1.5.2. Trouvez un exemple pour montrer que  $V$ , tel que défini dans Exemple 1.5.3(f) n'est pas fermé sous la multiplication scalaire.

1.5.3. Compléter la preuve du Théorème 1.5.6 en montrant que  $U \cap W$  est un sous-espace de  $V$ .

1.5.4. Prenons l'exemple 1.5.7.

- (a) Montrer que  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces de  $V$ .
- (b) Montrez que  $U + W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in F\}$ .

1.5.5. Supposons  $V = F^3$ ,  $U = \{(x, 0, z) \mid x, z \in F\}$ ,  $W = \{(y, y + z, z) \mid y, z \in F\}$ .

(a) Montrer que  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces de  $V$  et que

$$U = \text{Span}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \quad W = \text{Span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\} = \text{Span}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}.$$

(b) Montrez que  $U + W = F^3$ .

(c) Montrez que  $U \cap W = \text{Span}\{(1, 0, -1)\}$ .

1.5.6 ([Ber14, Ex. 1.6.5]). Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  des sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$ .

(a) Montrez que, si  $M \subseteq P$ , alors  $P \cap (M + N) = M + (P \cap N)$ . (c'est ce qu'on appelle la *loi de modularité* pour les sous-espaces.)

(b) Donnez un exemple pour montrer que, en général,  $P \cap (M + N) \neq (P \cap M) + (P \cap N)$ .  
*Indice* : Soit  $V = \mathbb{R}^2$  et soit  $P$ ,  $M$  et  $N$  trois droites distinctes passant par l'origine.

1.5.7. Compléter la preuve du Théorème 1.5.11 en montrant que (b) implique (a).

1.5.8. Soit  $U = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{(1, 1)\}$  et  $V = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{1, -1\}$ . Montrez que  $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ .

1.5.9. Soit  $X$  un ensemble non vide et soit  $F$  un corps. Rappelez-vous que  $\mathcal{F}(X, F)$  est l'ensemble des fonctions de  $X$  à  $F$  et est un espace vectoriel sur  $F$  (voir Exemple 1.2.5). Soit  $Y$  un sous-ensemble non vide de  $X$ . Montrez que

$$V = \{f \in \mathcal{F}(X, F) \mid f(x) = 0 \forall x \in Y\}$$

est un sous-espace de  $\mathcal{F}(X, F)$ .

1.5.10 ([Ber14, Ex. 1.6.13]). Soit  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (voir Exemple 1.2.5). On dit que  $y \in V$  est *pair* si  $y(-t) = y(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et on dit que  $z \in V$  est *impair* si  $z(-t) = -z(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Soit

$$M = \{y \in V \mid y \text{ est pair}\} \quad \text{et} \quad N = \{z \in V \mid z \text{ est impair}\}.$$

(a) Montrer que  $M$  et  $N$  sont des sous-espaces de  $V$  et que  $V = M \oplus N$ . *Indice* : Si  $x \in V$ , considérons les fonctions  $y$  et  $z$  définies par

$$y(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

(b) Que dit (a) pour  $x(t) = e^t$ ? *Indice* : Pensez aux fonctions trigonométriques hyperboliques.

(c) Que dit (a) pour une fonction polynomiale  $x$ ?

1.5.11. Supposer

$$V = V_1 \times V_2, \quad M_1 = \{(x_1, \mathbf{0}) \mid x_1 \in V_1\}, \quad M_2 = \{(\mathbf{0}, x_2) \mid x_2 \in V_2\}.$$

Prouver que  $V = M_1 \oplus M_2$ .

1.5.12 ([Ber14, Ex. 1.6.18]). Soient  $M$  et  $N$  des sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$  dont l'union  $M \cup N$  est aussi un sous-espace de  $V$ . Prouver que  $M \subseteq N$  ou  $N \subseteq M$ . *Indice* : Essayez la preuve par contradiction. Supposons qu'aucun de  $M$ ,  $N$  ne soit contenu dans l'autre. On peut alors choisir des vecteurs  $y \in M$ ,  $z \in N$  tels que  $y \notin N$ ,  $z \notin M$ . Pensez à la somme  $y + z$ .

1.5.13. Donner un exemple d'espace vectoriel  $V$  avec deux sous-espaces  $U$  et  $W$  tel que  $U \cup W$  n'est *pas* un sous-espace de  $V$ .

# Chapitre 2

## Applications linéaires

En règle générale, chaque fois que l'on introduit un nouveau type d'objet mathématique (comme les espaces vectoriels), il est important de considérer la notion naturelle d'application entre eux. Cela nous permet d'étudier les relations entre ces objets. Dans le cas des espaces vectoriels, la notion naturelle d'applications entre eux sont les applications linéaires. Le contenu de ce chapitre correspond à peu près à [Tre, §§1.3–1.6].

### 2.1 Définition et exemples

**Definition 2.1.1.** Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels sur le même corps  $F$ . Une fonction  $T: V \rightarrow W$  est dite *linéaire* si

- (a)  $T(v + w) = T(v) + T(w)$  pour tous les  $v, w \in V$ , et
- (b)  $T(cv) = cT(v)$  pour tous les  $c \in F$  et  $v \in V$ .

Une telle fonction est souvent appelé une *application linéaire*.

*Remark 2.1.2.* Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire et  $v \in V$ , nous écrirons parfois  $Tv$  au lieu de  $T(v)$ . (Cela devrait vous rappeler la multiplication matricielle.)

*Remark 2.1.3.* Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$  et  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire.

- (a) Il découle de la définition d'une application linéaire que

$$T(cv + dw) = cT(v) + dT(w), \quad \forall c, d \in F, v, w \in V.$$

- (b) En fait, si  $c_1, \dots, c_n \in F$ , et  $v_1, \dots, v_n \in V$ , nous avons

$$T\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i).$$

- (c) Nous avons aussi

$$T(\mathbf{0}_V) = T(0 \cdot \mathbf{0}_V) = 0 \cdot T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Ici, nous utilisons la notation  $\mathbf{0}_V$  et  $\mathbf{0}_W$  pour faire la distinction entre les vecteurs nuls de  $V$  et  $W$ .

(d) Pour  $v \in V$ , nous avons

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v).$$

Maintenant que nous avons la définition des applications linéaires, nous allons montrer comment construire certaines applications linéaires.

**Theorem 2.1.4.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  et  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . (Notez que nous n'exigeons pas que  $v_i$  soit distinct. En d'autres termes, certains  $v_i$  peuvent être égaux.) Alors, l'application  $T: F^n \rightarrow V$  définie par*

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_iv_i.$$

*est linéaire. De plus, c'est l'unique application linéaire telle que  $Te_i = v_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , où les  $e_i$  sont les vecteurs décrits dans l'Exemple 1.4.8.*

*Démonstration.* Si  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  sont des vecteurs dans  $F^n$  et  $c \in F$ , alors

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) \\ &= (a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_n+b_n)v_n \\ &= (a_1v_1 + \dots + a_nv_n) + (b_1v_1 + \dots + b_nv_n) \\ &= Ta + Tb. \end{aligned}$$

de plus,

$$\begin{aligned} T(ca) &= T(ca_1, \dots, ca_n) \\ &= (ca_1)v_1 + \dots + (ca_n)v_n \\ &= c(a_1v_1) + \dots + c(a_nv_n) \\ &= c(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) \\ &= c(Ta). \end{aligned}$$

Donc  $T$  est linéaire. Maintenant

$$Te_i = T(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n = v_i.$$

Et si  $S$  est une autre application linéaire telle que  $Se_i = v_i$  pour tout  $i$ , alors pour tout  $a = (a_1, \dots, a_n) \in F^n$ , on a

$$Sa = S(a_1, \dots, a_n) = S(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = \sum_{i=1}^n a_iS(e_i) = \sum_{i=1}^n a_iv_i = Ta.$$

Ainsi  $Sa = Ta$  pour tout  $a \in F^n$  et donc  $S = T$ . □

*Remark 2.1.5.* Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . Pour montrer qu'une application  $T: V \rightarrow W$  est linéaire, il suffit de montrer que

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \quad \forall c, d \in F, u, v \in V.$$

Pourquoi? Considérons le cas  $c = d = 1$  puis le cas  $d = 0$ .

*Examples 2.1.6.* (a) Soit  $V = C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F = \mathbb{R}$ , et définissons  $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  par  $D(f) = f'$  (ie l'application  $D$  prend la dérivée). Alors nous savons par les cours d'analyse que

$$D(cf + dg) = (cf + dg)' = cf' + dg' = cD(f) + dD(g),$$

pour tous les  $c, d \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

(b) Si

$$C^n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } n \text{ fois différentiable}\},$$

alors  $D: C^n(\mathbb{R}) \rightarrow C^{n-1}(\mathbb{R})$  est linéaire ( $n \geq 1$ ).

(c) Soit  $V = C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F = \mathbb{R}$ , et définissons  $S: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  par

$$(Sf)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par les résultats d'analyse, nous savons que  $S(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$  et

$$\begin{aligned} S(cf + dg) &= \int_0^x (cf + dg)(t) dt = \int_0^x (cf(t) + dg(t)) dt \\ &= c \int_0^x f(t) dt + d \int_0^x g(t) dt = cS(f) + dS(g), \end{aligned}$$

pour tous  $c, d \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Ainsi  $S$  est une application linéaire.

(d) Nous laissons en exercice (Exercice 2.1.1) la preuve que l'application  $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $T(at^2 + bt + c) = (a, b, c)$  est linéaire.

*Examples 2.1.7.* Voici les applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathbb{R}^3$  (Exercice 2.1.2) :

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3) &= (x_3, x_1, x_2) \\ T(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 - 5x_3, 0, 2x_2) \end{aligned}$$

*Example 2.1.8.* Les applications

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & T(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 - x_1, 2x_3), \\ S: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4, & S(x_1, x_2) &= (2x_2 - x_1, 0, x_1, -4x_2) \end{aligned}$$

sont linéaires (Exercice 2.1.3).



*Exemple 2.1.9.* Si  $V$  est un espace vectoriel et  $a$  est un scalaire quelconque, alors l'application  $T: V \rightarrow V$  définie par  $Tv = av$  est linéaire puisque pour tous  $u, v \in V$  et pour tous scalaires  $c, d$ , nous avons

$$\begin{aligned} T(cu + dv) &= a(cu + dv) = a(cu) + a(dv) = (ac)u + (ad)v \\ &= (ca)u + (da)v = c(au) + d(av) = cTu + dTv. \end{aligned}$$

Notez que nous avons utilisé la commutativité du corps des scalaires ici.

**Definition 2.1.10** (Forme linéaire et espace dual). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$ . Une *forme linéaire* sur  $V$  est une application linéaire  $V \rightarrow F$  et on note

$$V^* := \{f \mid f: V \rightarrow F \text{ est linéaire}\}$$

qu'on appelle l'*espace dual* (ou simplement *dual*) de  $V$ .

Nous verrons bientôt que  $V^*$  est lui-même un espace vectoriel.

## Exercices.

2.1.1. Montrer que l'application  $T$  définie dans 2.1.6(d) est linéaire.

2.1.2. Vérifiez que les applications de l'exercice 2.1.7 sont linéaires.

2.1.3. Vérifiez que les applications de l'exercice 2.1.8 sont linéaires.

2.1.4. Supposons que  $V$  est un espace vectoriel. Prouvez que l'application

$$T: V \times V \rightarrow V, \quad T(u, v) = u - v,$$

est linéaire.

2.1.5. On fixe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^3$  et on définit

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(u) = u \times v,$$

où  $u \times v$  désigne le produit vectoriel de  $u$  et  $v$ . Montrez que  $T$  est linéaire.

2.1.6. Supposons que  $F$  est un corps,  $X$  est un ensemble et  $x \in X$ . Montrez que l'application

$$T: \mathcal{F}(X, F) \rightarrow F, \quad T(f) = f(x),$$

est une forme linéaire sur  $\mathcal{F}(X, F)$ .

2.1.7. Prouvez que si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors  $T(u - v) = T(u) - T(v)$  pour tout  $u, v \in V$ .

## 2.2 Noyau et image

**Definition 2.2.1.** Si  $f: A \rightarrow B$  est une fonction entre deux ensembles (en particulier,  $f$  pourrait être une application linéaire entre des espaces vectoriels) et  $A' \subseteq A$ , alors

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\} \subseteq B$$

s'appelle l'*image* (ou *image directe*) de  $A'$  par  $f$ . Si  $B' \subseteq B$ , alors

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \subseteq A$$

s'appelle la *pre-image* (ou *image inverse*) de  $B'$  sous  $f$ . Notez que nous utilisons la notation  $f^{-1}(B')$  ici même si nous ne supposons *pas* que  $f$  est inversible. Si  $B' = \{b\}$  est constitué d'un seul élément, on écrira parfois  $f^{-1}(b)$  pour  $f^{-1}(\{b\})$  (mais il faut faire très attention à ne pas confondre cela avec la fonction inverse, qui peut exister ou non).

Par exemple, Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par  $f(x) = x^2$ , alors la fonction  $f$  n'est pas inversible puisqu'elle n'est pas injective. Cependant, nous pouvons toujours calculer des images inverses. Par exemple

$$f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-1, 0, 1\}, \quad f^{-1}(4) = \{-2, 2\}, \quad f^{-1}(-1) = \emptyset.$$

Nous avons également

$$f(\{-1, 1, 4\}) = \{1, 16\}, \quad f(\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 25\}.$$

**Theorem 2.2.2.** *Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels et que  $T: V \rightarrow W$  soit une application linéaire.*

- (a) *Si  $M$  est un sous-espace de  $V$ , alors  $T(M)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .*
- (b) *Si  $N$  est un sous-espace de  $W$ , alors  $T^{-1}(N)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .*

*Démonstration.* Nous utiliserons la remark 1.5.12 dans cette preuve.

(a) Puisque  $M$  est un sous-espace, nous avons  $\mathbf{0} \in M$  et donc  $\mathbf{0} = T\mathbf{0} \in T(M)$ . Supposons maintenant que  $y, y' \in T(M)$  et  $c, c'$  soient des scalaires. Alors il existe  $x, x' \in M$  tel que  $y = Tx, y' = Tx'$  et donc

$$cy + c'y' = cTx + c'Tx' = T(cx) + T(c'x') = T(cx + c'x') \in T(M)$$

puisque  $cx + c'x' \in M$  (car  $M$  est un sous-espace).

(b) Comme  $T\mathbf{0} = \mathbf{0} \in N$ , nous avons  $\mathbf{0} \in T^{-1}(N)$ . Supposons maintenant que  $x, x' \in T^{-1}(N)$  et  $c, c'$  soient des scalaires. Alors

$$T(cx + c'x') = cTx + c'Tx' \in N,$$

car  $Tx, Tx' \in N$ . Ainsi  $cx + c'x' \in T^{-1}(N)$ .

□

**Definition 2.2.3** (Noyau et image). Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors

$$\text{Ker } T = T^{-1}(\mathbf{0}) = \{x \mid Tx = \mathbf{0}\}$$

s'appelle le *noyau* de  $T$  et

$$\text{Im } T = T(V) = \{Tx \mid x \in V\}$$

s'appelle l'*image* de  $T$ .

**Corollary 2.2.4.** Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors  $\text{Ker } T$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  et  $\text{Im } T$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

*Démonstration.* On applique le Theorem 2.2.2 avec  $M = V$  et  $N = \{\mathbf{0}\}$ . □

*Example 2.2.5.* Soit  $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  l'application linéaire donnée par dérivation. Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker } D &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f \text{ est constant}\}, \\ \text{Im } D &= C^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Pourquoi  $\text{Im } T$  est-il entièrement  $C^\infty(\mathbb{R})$ ? Supposons  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Définissez  $F$  par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Nous savons par des résultats du cours d'analyse que  $F$  est différentiable et  $DF = F' = f$  (cela montre que  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ ). Par conséquent, chaque  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  est dans l'image de  $D$ .

*Example 2.2.6.* Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme linéaire définie par  $f(x_1, x_2) = x_2 - 3x_1$ . Alors  $\text{Im } f = \mathbb{R}$  et le noyau de  $f$  est une ligne passant par l'origine (la ligne  $x_2 = 3x_1$ ).

*Example 2.2.7.* Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1)$ . Alors  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$  et l'image de  $T$  est le 'plan  $x, z$ ' dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Theorem 2.2.8.** Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire. Alors  $T$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ .

*Démonstration.* Supposons  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ . Alors, pour  $v, v' \in V$ ,

$$Tv = Tv' \implies Tv - Tv' = \mathbf{0} \implies T(v - v') = \mathbf{0} \implies v - v' = \mathbf{0} \implies v = v'.$$

Ainsi  $T$  est injectif. Supposons maintenant que  $T$  est injectif. Alors pour  $v \in V$ ,

$$Tv = \mathbf{0} = T\mathbf{0} \implies v = \mathbf{0}.$$

D'où  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ . □

*Remark 2.2.9.* Notez que le théorème 2.2.8 ne s'applique qu'aux applications linéaires. Par exemple, soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = x^2$ . Alors  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  mais  $f$  n'est pas injective puisque, par exemple,  $f(1) = f(-1)$ .

## Exercices.

2.2.1 ([Ber14, Ex. 2.1.7]). Soit  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions polynomiales réelles (voir Exemple 1.2.8) et définissons

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = p'(1).$$

Démontrer que  $f$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{P}$ . Quelle est l'interprétation géométrique du noyau de  $f$  ?

2.2.2. Supposons que  $S: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  est l'application de l'Exemple 2.1.6(c). Qu'est-ce que  $\text{Im } S$  ? *Indice* :  $S$  n'est pas surjectif.

2.2.3 ([Ber14, Ex. 2.2.2]). Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $F$ , et soit  $f: V \rightarrow F$  une forme linéaire sur  $V$ . Supposons que  $f$  n'est pas identiquement nulle et choisissons un vecteur  $v$  tel que  $f(v) \neq 0$ . Soit  $N = \text{Ker } f$ . Montrer que, pour tout vecteur  $u \in V$ , il existe des uniques  $z \in N$  et  $c \in F$  tels que  $u = z + cv$ . *Indice* : Si  $u \in V$ , calculez la valeur de  $f$  sur le vecteur  $u - (f(u)/f(v))v$ .

2.2.4 ([Ber14, Ex. 2.2.3]). Soit  $S: V \rightarrow W$  et  $T: V \rightarrow W$  des applications linéaires, et soit

$$M = \{v \in V \mid S(v) \in T(V)\}.$$

Montrer que  $M$  est un sous-espace de  $V$ .

2.2.5 ([Ber14, Ex. 2.2.6]). Soit  $\mathcal{P}$  l'espace des fonctions polynomiales réelles et soit  $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  l'application définie par  $Tp = p - p'$ , où  $p'$  est la dérivée de  $p$ . Prouvez que  $T$  est linéaire et injective.

2.2.6 ([Ber14, Ex. 2.3.15]). Soient  $T: U \rightarrow V$  et  $S: V \rightarrow W$  des applications linéaires. Prouver :

- (a) Si  $S$  est injectif, alors  $\text{Ker}(ST) = \text{Ker}(T)$ .
- (b) Si  $T$  est surjectif, alors  $\text{Im}(ST) = \text{Im}(S)$ .

2.2.7. Soit  $V$  un espace vectoriel et  $S, T \in \mathcal{L}(V)$ . Montrez que si  $ST = TS$ , alors  $S(\text{Ker } T) \subseteq \text{Ker } T$ .

2.2.8. Supposons que  $V$  est un espace vectoriel et considérons l'application linéaire (voir exercice 2.1.4)

$$T: V \times V \rightarrow V, \quad T(u, v) = u - v.$$

Déterminez le noyau et l'image de  $T$ .

## 2.3 Espaces vectoriels des applications linéaires

**Definition 2.3.1.** Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . Nous définissons

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T: V \rightarrow W \mid T \text{ est linéaire}\}.$$

Dans le cas où  $V = W$ , on écrit  $\mathcal{L}(V)$  pour  $\mathcal{L}(V, V)$ .

*Exemple 2.3.2* (application linéaire nulle). Pour tout espace vectoriel  $V$  et  $W$  sur un corps  $F$ , on a l'*application linéaire nulle* (ou l'*application linéaire 0*) qui envoie chaque élément de  $V$  sur  $\mathbf{0} \in W$ . On note cette application  $0$  ou (c'est à dire  $0(v) = \mathbf{0}$  pour tout  $v \in V$ ). Ainsi  $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ .

*Exemple 2.3.3* (application identité). L'application  $I: V \rightarrow V$  définie par  $Iv = v$  pour tout  $v \in V$  est linéaire et s'appelle l'*application linéaire d'identité*. On écrit parfois  $I_V$  quand on veut préciser l'espace vectoriel sur lequel elle agit.

*Exemple 2.3.4* (application linéaire scalaire). Si  $a$  est un scalaire quelconque, alors l'application  $T: V \rightarrow V$  définie par  $Tv = av$  est linéaire (voir Exemple 2.1.9).

*Exemple 2.3.5* (Formes linéaires). Les éléments de  $\mathcal{L}(V, F)$  sont précisément les formes linéaires sur  $V$ .

Rappelez-vous que dans MAT 1741, vous avez appris que chaque application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$  (dont les éléments sont écrits sous forme de vecteurs colonnes) est donnée par multiplication par la matrice  $m \times n$

$$A = [f(e_1) \quad f(e_2) \quad \cdots \quad f(e_n)],$$

où  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la *base standard* de  $\mathbb{R}^n$  (voir Exemple 1.4.8) et  $f(e_j)$  est la  $j$ -ème colonne de  $A$ . La matrice  $A$  est appelée la *matrice standard* de l'application linéaire.

*Exemple 2.3.6.* L'application linéaire  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$T(x, y, z) = (y, z)$$

a une matrice standard

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

puisque

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Plus tard dans le cours, nous reviendrons sur les matrices, et nous verrons des matrices avec des entrées dans un corps arbitraire  $F$  et leur relation avec des applications linéaires entre des espaces vectoriels sur  $F$ .

Notre objectif est maintenant de transformer  $\mathcal{L}(V, W)$  en un espace vectoriel lui-même. Nous devons donc définir l'addition vectoriel et la multiplication scalaire, puis vérifier les axiomes d'un espace vectoriel.

**Definition 2.3.7.** Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$  et  $c \in F$ . Pour  $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ , définissez  $S + T$  et  $cT$  par

$$\begin{aligned}(S + T)(v) &= S(v) + T(v), \quad \forall v \in V, \\ (cT)(v) &= cT(v), \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

**Lemma 2.3.8.** Si  $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$  et  $a$  est un scalaire, alors  $S + T, aT \in \mathcal{L}(V, W)$ .

*Démonstration.* Nous montrons d'abord que  $S + T$  est linéaire. Pour  $u, v \in V$  et  $c, d \in F$ , nous avons

$$\begin{aligned}(S + T)(cu + dv) &= S(cu + dv) + T(cu + dv) \\ &= cS(u) + dS(v) + cT(u) + dT(v) \\ &= cS(u) + cT(u) + dS(v) + dT(v) \\ &= c(S(u) + T(u)) + d(S(v) + T(v)) \\ &= c(S + T)(u) + d(S + T)(v).\end{aligned}$$

Par conséquent,  $S + T$  est linéaire. Nous le laissons en exercice (Exercice 2.3.1) la preuve que  $aT$  est linéaire.  $\square$

**Theorem 2.3.9.** Si  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$ , alors  $\mathcal{L}(V, W)$  est aussi un espace vectoriel sur  $F$  (avec les opérations définies dans Définition 2.3.7).

*Démonstration.* Il faut montrer que les axiomes de Définition 1.2.1 sont satisfaits.

L'addition vectorielle est commutative et associative puisque pour tout  $S, T, U \in \mathcal{L}(V, W)$  et  $v \in V$ , on a

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) = T(v) + S(v) = (T + S)(v),$$

et

$$\begin{aligned}((S + T) + U)(v) &= (S + T)(v) + U(v) = S(v) + T(v) + U(v) \\ &= S(v) + (T + U)(v) = (S + (T + U))(v).\end{aligned}$$

L'application linéaire nulle est un élément neutre pour l'addition vectoriel puisque  $T + \mathbf{0} = T$  pour tout  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ .

Pour tout  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ , l'application  $-T = (-1)T$  est linéaire et est l'inverse de  $T$  pour l'opération d'addition vectoriel puisque

$$(T + (-T))(v) = T(v) + (-1)T(v) = \mathbf{0} \quad \forall v \in V.$$

Nous laissons en exercice (Exercice 2.3.1) la démonstration des axiomes restants de la Définition 1.2.1.  $\square$

*Exemple 2.3.10.* Fixez  $c \in \mathbb{R}$  et définissez une application  $\varphi_c: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\varphi_c(f) = f(c) \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Nous montrons que  $\varphi_c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$  (voir Définition 2.1.10). Pour ce faire, nous devons montrer que  $\varphi_c$  est linéaire. Pour  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  et  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , nous avons

$$\varphi_c(k_1f_1 + k_2f_2) = (k_1f_1 + k_2f_2)(c) = k_1f_1(c) + k_2f_2(c) = k_1\varphi_c(f_1) + k_2\varphi_c(f_2).$$

Ainsi  $\varphi_c$  est linéaire. Cet exemple est important en physique quantique. La soi-disant "fonction delta" qui décrit l'état d'une particule située au point est ce type de forme linéaire (c'est-à-dire évaluation au point).

**Définition 2.3.11** (Composition des applications). Si  $A, B$  et  $C$  sont des ensembles (par exemple des espaces vectoriels), et  $T: A \rightarrow B$  et  $S: B \rightarrow C$  des applications, nous écrivons  $ST: A \rightarrow C$  pour l'*application composée* (ou simplement la *composition*) Défini par

$$(ST)a = S(Ta) \quad \forall a \in A.$$

La composition des applications est associative, donc si  $R: C \rightarrow D$  est une troisième application, nous avons  $(RS)T = R(ST)$ . On écrit simplement  $RST$  pour cette triple composition.

*Remark 2.3.12.* Parfois, les applications de composition sont écrites sous la forme  $S \circ T$ . Nous utilisons la notation plus courte  $ST$  pour nous rappeler la multiplication matricielle. Comme dans MAT 1741, nous verrons que la composition et la multiplication matricielle sont étroitement liées.

**Theorem 2.3.13.** *La composition de deux applications linéaires est une application linéaire. En d'autres termes, si  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  et  $S \in \mathcal{L}(V, W)$ , alors  $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ .*

*Démonstration.* Pour  $u, u' \in U$  et  $c$  un scalaire, nous avons

$$\begin{aligned} (ST)(u + u') &= S(T(u + u')) \\ &= S(Tu + Tu') \\ &= S(Tu) + S(Tu') \\ &= (ST)(u) + (ST)(u'), \\ (ST)(cu) &= S(T(cu)) = S(c(Tu)) = c(S(Tu)) = c((ST)u). \end{aligned} \quad \square$$

Notez que si  $U = V = W$ , alors le théorème ci-dessus nous dit que si  $S, T \in \mathcal{L}(V)$ , alors  $ST \in \mathcal{L}(V)$ . Par conséquent nous avons *Trois* opérations sur  $\mathcal{L}(V)$  : l'addition, la multiplication par des scalaires et la composition.

**Définition 2.3.14** (Puissance d'une application). Si  $T$  est une application d'un ensemble dans lui-même (par exemple, si  $T \in \mathcal{L}(V)$ ), alors les *puissances* de  $T$  sont définis par

$$T^1 = T, \quad T^2 = TT, \quad T^3 = TT^2, \quad \dots, \quad T^n = TT^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Nous définissons également  $T^0$  comme étant l'application identité .

## Exercices.

2.3.1. Compléter la preuve du Lemme 2.3.8 en montrant que  $aT$  est linéaire.

2.3.2. Compléter la preuve du théorème 2.3.9 en vérifiant les axiomes restants de la définition 1.2.1.

2.3.3 ([Ber14, Ex. 2.3.2]). Soit  $V$  un espace vectoriel. Si  $R, S, T \in \mathcal{L}(V)$  et  $c$  est un scalaire, prouvez les affirmations suivantes :

- (a)  $(RS)T = R(ST)$  ;
- (b)  $(R + S)T = RT + ST$  ;
- (c)  $R(S + T) = RS + RT$  ;
- (d)  $(cS)T = c(ST) = S(cT)$  ;
- (e)  $TI = T = IT$ , où  $I$  est l'application identité .

2.3.4. Si  $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  sont définis par

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &= (x - 2y + 3z, y - 2z, 4y), \\ T(x, y, z) &= (y - z, 2x + y, x + 2x), \end{aligned}$$

donnez des expressions explicites pour  $S + T$ ,  $2T$ ,  $S - T$  et  $ST$ .

2.3.5. Supposons que  $T: V \rightarrow V$  est une application linéaire telle que  $\text{Im } T \subseteq \text{Ker}(T - I)$ . Prouver que  $T^2 = T$ .

2.3.6 ([Ber14, Ex. 2.3.9]). Soit  $U, V, W$  des espaces vectoriels sur  $F$ . Démontrez ce qui suit :

- (a) Pour  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  fixé, l'application

$$\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(U, W), \quad S \mapsto ST,$$

est linéaire.

- (b) Pour  $S \in \mathcal{L}(V, W)$  fixé, l'application

$$\mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathcal{L}(U, W), \quad T \mapsto ST,$$

est linéaire.

2.3.7 ([Ber14, Ex. 2.3.12]). Supposons  $V = U \oplus W$ . Pour chaque  $v \in V$ , soit  $v = u + w$  sa décomposition unique avec  $u \in U$  et  $w \in W$ , et définissons  $Pv = u$ ,  $Qv = w$ . Prouver que  $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ ,  $P^2 = P$ ,  $Q^2 = Q$ ,  $P + Q = I$  et  $PQ = QP = \mathbf{0}$ .

2.3.8 ([Ber14, Ex. 2.3.13]). Soit  $T: V \rightarrow V$  une application linéaire telle que  $T^2 = T$ , et soit

$$U = \text{Im } T, \quad W = \text{Ker } T.$$

Prouver que  $U = \{v \in V \mid Tv = v\} = \text{Ker}(T - I)$  et que  $V = U \oplus W$ .



2.3.9 ([Ber14, Ex. 2.3.14]). Donner un exemple de  $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $ST \neq TS$ .

2.3.10 ([Ber14, Ex. 2.3.16]). Soit  $V$  un espace vectoriel réel ou complexe et soit  $T \in \mathcal{L}(V)$  tel que  $T^2 = I$ . On définit

$$M = \{v \in V \mid Tv = v\}, \quad N = \{v \in V \mid Tv = -v\}.$$

Montrer que  $M$  et  $N$  sont des sous-espaces de  $V$  et que  $V = M \oplus N$ . *Indice* : Pour tout vecteur  $v$ , nous avons

$$v = \frac{1}{2}(v + Tv) + \frac{1}{2}(v - Tv).$$

2.3.11 ([Ber14, Ex. 2.3.19]). Soit  $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$  et soit  $U = \{v \in V \mid Sv = Tv\}$ . Montrer que  $U$  est un sous-espace de  $V$ . *Indice* : Considérez  $\text{Ker}(S - T)$ .

2.3.12 ([Ber14, Ex. 2.3.20]). Si  $T: V \rightarrow W$  et  $S: W \rightarrow V$  sont des applications linéaires telles que  $ST = I$ , montrez que  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$  et  $\text{Im } S = V$ .

2.3.13 ([Ber14, Ex. 2.3.24]). Soit  $V = \mathcal{P}$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles, et soit  $D: V \rightarrow V$  l'application de dérivation  $Dp = p'$ . Soit  $u \in \mathcal{P}$  le monôme  $u(t) = t$ , et définissons une autre application linéaire qui est la multiplication par  $t$  :

$$M: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad Mp = up.$$

Prouver que  $DM - MD = I$ . *Indice* : Vous devez montrer que  $(up)' - up' = p$  pour tous les  $p \in \mathcal{P}$ . Rappelez-vous la règle pour la dérivé d'un produit.

## 2.4 Isomorphismes

Nous allons maintenant discuter d'une manière précise comment certains espaces vectoriels sont "identiques" (mais pas nécessairement égaux).

**Definition 2.4.1** (Isomorphisme). Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective  $T: V \rightarrow W$ , où  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels. On dit qu'un espace vectoriel  $V$  est *isomorphe* à un autre espace vectoriel  $W$  (sur le même corps) s'il existe un isomorphisme  $T: V \rightarrow W$ . Nous écrivons  $V \cong W$  pour indiquer que  $V$  est isomorphe à  $W$ .

*Remark 2.4.2.* On devrait considérer les espaces vectoriels isomorphes comme étant "les mêmes" en ce qui concerne leurs propriétés d'espace vectoriel. Bien sûr, ils donnent un aspect assez différent (et ne sont, en général, pas égaux). Mais l'isomorphisme identifie les deux d'une manière qui préserve les opérations d'un espace vectoriel.

*Example 2.4.3.* Soit

$$V = \mathbb{R}^2, \\ W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors  $V \cong W$ . Pour prouver cela, nous devons trouver un isomorphisme spécifique, par exemple l'application

$$T: V \rightarrow W, \quad T(x, y) = (x, y, 0).$$

Nous laissons en exercice (Exercice 2.4.1) la preuve que  $T$  est bien un isomorphisme.

Notez qu'il existe plusieurs isomorphismes de  $V$  à  $W$ . Par exemple,

$$T_1(x, y) = (y, x, 0) \quad \text{et} \quad T_2(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

sont deux autres isomorphismes de  $V$  à  $W$ .

*Exemple 2.4.4.* Considérez l'application

$$T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(at^2 + bt + c) = (a, b, c).$$

On vous a demandé de montrer dans l'exercice 2.1.1 que l'application  $T$  est linéaire. Il est facile de voir que  $T$  est bijective. Ainsi,  $T$  est un isomorphisme. D'où  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$  (en tant qu'espaces vectoriels réels).

*Exemple 2.4.5.* On peut montrer que  $\mathcal{P}_n(F) \cong F^{n+1}$  pour tout corps  $F$ .

*Remark 2.4.6.* Il existe une différence entre les symboles  $\rightarrow$  et  $\mapsto$ . Nous utilisons  $\rightarrow$  lorsque nous écrivons  $T: V \rightarrow W$  pour indiquer que  $T$  est une application avec le domaine  $V$  et le codomaine  $W$ . Nous utilisons  $\mapsto$  pour décrire une application. Donc  $x \mapsto Tx$  est l'application qui envoie  $x$  sur  $Tx$ .

*Exemple 2.4.7.* Soit  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ . Nous savons grâce aux techniques apprises dans MAT 1741 que  $U$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  puisqu'il s'agit de l'ensemble solution d'un système d'équations linéaires. En fait, vous pouvez utiliser les techniques de MAT 1741 pour montrer que

$$U = \text{Span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

On pose

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow U, \quad T(x, y) = x(-1, 1, 0) + y(-1, 0, 1) = (-x - y, x, y).$$

Alors  $T$  est linéaire puisqu'il correspond à la multiplication par la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous le laissons en exercice (Exercice 2.4.4) la preuve que  $T$  est bijective. Notez qu'elle n'est *pas* bijective si on la considère comme une application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , mais elle *est* bijective comme application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow U$ . Donc  $T$  est un isomorphisme et  $\mathbb{R}^2 \cong U$ .

*Exemple 2.4.8.* Rappelez-vous que  $\mathbb{C}$  peut être considéré comme un espace vectoriel. Alors

$$(a, b) \mapsto a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{C}$ . Donc  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  *comme espaces vectoriels réels*. Notez qu'il est important de dire quel *type* d'isomorphisme nous avons ici (c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels réels). Nous n'utilisons pas la structure d'espace vectoriel complexe sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$  n'est pas équipé d'une structure d'espace vectoriel complexe.

Rappelons qu'une *inverse* (ou *réciproque*) d'une application  $f: A \rightarrow B$  est une application  $g: B \rightarrow A$  telle que  $gf$  est l'application identité sur  $A$  et  $fg$  est l'application identité sur  $B$ . Autrement dit,

$$(gf)(a) = a \quad \forall a \in A, \quad \text{et} \quad (fg)(b) = b \quad \forall b \in B.$$

On écrit  $f^{-1}$  pour une telle application  $g$ .

Rappelez-vous que les applications bijectives ont des inverses. Si  $f: A \rightarrow B$  est une application bijective d'un ensemble  $A$  vers un ensemble  $B$ , alors nous pouvons définir l'application inverse  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , par

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

En d'autres termes, pour tout  $b \in B$ ,  $f^{-1}(b)$  est défini comme étant l'unique élément  $a$  de  $A$  tel que  $f(a) = b$ . Un tel  $a$  existe puisque  $f$  est surjectif et il est unique puisque  $f$  est injectif.

**Theorem 2.4.9.** *Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire bijective (c'est-à-dire un isomorphisme), alors l'application inverse  $T^{-1}: W \rightarrow V$  est également linéaire (donc est un isomorphisme, puisqu'elle est bijective par Exercice 2.4.6).*

*Démonstration.* Soit  $w, w' \in W$  et  $c, c' \in F$ . Nous voulons montrer que

$$T^{-1}(cw + c'w') = cT^{-1}w + c'T^{-1}w'. \quad (2.1)$$

Rappelons que puisque  $T$  est injective, pour tout  $u, v \in V$ , nous avons que  $Tu = Tv$  implique  $u = v$ . Appliquons donc  $T$  de chaque côté de 2.1 et essayons de montrer que les résultats sont égaux. En appliquant  $T$  à côté gauche, nous obtenons

$$TT^{-1}(cw + c'w') = cw + c'w'.$$

Maintenant, en appliquant  $T$  au membre de droite, nous obtenons

$$T(cT^{-1}w + c'T^{-1}w') = cTT^{-1}w + c'TT^{-1}w' = cw + c'w',$$

où nous avons utilisé le fait que  $T$  est linéaire. On voit ainsi que

$$T(T^{-1}(cw + c'w')) = T(cT^{-1}w + c'T^{-1}w')$$

et donc  $T^{-1}(cw + c'w') = cT^{-1}w + c'T^{-1}w'$  par l'injectivité de  $T$ . □

*Remark 2.4.10.* Par l'exercice 2.4.6, si une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  a un inverse, alors c'est un isomorphisme. Cela peut être un moyen utile de montrer qu'une application linéaire donnée est un isomorphisme.

*Example 2.4.11.* Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice inversible quelconque, alors l'application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $v \mapsto Av$  pour  $v \in \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme. En effet, elle est linéaire (d'après MAT 1741) et elle a un inverse, à savoir l'application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par  $v \mapsto A^{-1}v$  pour  $v \in \mathbb{R}^n$ . Il s'agit bien d'une application inverse puisque

$$AA^{-1}v = Iv = v \quad \text{et} \quad A^{-1}Av = Iv = v \quad \forall v \in V.$$

Nous recueillons maintenant quelques belles propriétés de l'isomorphisme. Le théorème suivant énonce que l'isomorphisme est une *relation d'équivalence* (voir Définition B.1.1).

**Theorem 2.4.12.** *Supposons que  $U, V, W$  sont des espaces vectoriels sur le même corps. Alors*

- (a)  $V \cong V$  (la relation d'isomorphisme est réflexive),
- (b) si  $V \cong W$ , alors  $W \cong V$  (la relation d'isomorphisme est symétrique),
- (c) si  $U \cong V$  et  $V \cong W$ , alors  $U \cong W$  (la relation d'isomorphisme est transitive).

*Démonstration.* (a) L'application identité  $I: V \rightarrow V$  est un isomorphisme.

(b) Nous savons maintenant que l'inverse d'un isomorphisme est lui-même un isomorphisme. Supposons donc  $V \cong W$ . Alors il existe un isomorphisme  $T: V \rightarrow W$ . Ainsi, l'inverse  $T^{-1}: W \rightarrow V$  est un isomorphisme. D'où  $W \cong V$ .

(c) Si  $T: U \rightarrow V$  et  $S: V \rightarrow W$  sont des isomorphismes, alors la composition  $ST: U \rightarrow W$  est également linéaire et bijective, donc est un isomorphisme. □

## Exercices.

2.4.1. Prouver que les applications  $T$ ,  $T_1$  et  $T_2$  de l'exemple 2.4.3 sont linéaires. Il faut donc montrer qu'elles sont linéaires et bijectives.

2.4.2. Montrer que  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2.4.3. Soit  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $V = \mathcal{F}(A, F)$  pour un certain corps  $F$ . Montrez que  $V \cong F^n$  via la bijection  $x \mapsto (x(1), x(2), \dots, x(n))$ .

2.4.4. Montrer que l'application  $T$  de Exemple 2.4.7 est bijective.

2.4.5. Montrez que  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  comme espaces vectoriels réels.

2.4.6. Démontrez les affirmations suivantes :

- (a) L'inverse d'une application bijective est également bijective.
- (b) Si  $f: A \rightarrow B$  a un inverse, alors  $f$  est bijectif. En combinant cela avec les remarques ci-dessus, cela signifie qu'une application est bijective si et seulement si elle a un inverse.
- (c) La composition de deux applications injectives est elle-même une application injective.
- (d) La composition de deux applications surjectives est elle-même une application surjective.
- (e) La composition de deux applications bijectives est elle-même une application bijective.

Les étudiants qui ont suivi le cours MAT 1762 auront déjà vu ces énoncés (voir [Sav, §8.1]).

2.4.7 ([Ber14, Ex. 2.4.5]). Soit  $V$  un espace vectoriel,  $T \in \mathcal{L}(V)$  une application bijective et  $c$  un scalaire non nul. Montrer que  $cT$  est bijectif et que  $(cT)^{-1} = c^{-1}T^{-1}$ .

2.4.8 ([Ber14, Ex. 2.4.6]). Soit  $T: V \rightarrow W$  un isomorphisme. Pour chaque  $S \in \mathcal{L}(V)$ , définissez  $\varphi(S) = TST^{-1}$  (notez que le produit est défini). Montrez que  $\varphi: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(W)$  est un isomorphisme et que  $\varphi(RS) = \varphi(R)\varphi(S)$  pour tout  $R, S \in \mathcal{L}(V)$ . N'oubliez pas que vous devez montrer que  $\varphi$  est lui-même une application linéaire.

2.4.9 ([Ber14, Ex. 2.4.7]). Soit  $V$  un espace vectoriel, et soit  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Démontrez que :

- (a) Si  $T^2 = 0$ , alors  $I - T$  est bijectif.
- (b) Si  $T^n = 0$  pour un entier strictement positif  $n$ , alors  $I - T$  est bijectif.

*Indice* : En algèbre polynomiale,  $(1 - t)(1 + t) = 1 - t^2$ .

2.4.10. Soit  $U, V, W$  des espaces vectoriels sur le même corps. Démontrez ce qui suit :

- (a)  $(U \times V) \times W \cong U \times (V \times W)$ .
- (b)  $V \times W \cong W \times V$ .

2.4.11. Pour les entiers strictement positif  $n$  et  $m$ , prouver que  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ .

# Chapitre 3

## Structure des espaces vectoriels

Dans ce chapitre, nous allons explorer la structure des espaces vectoriels plus en détail. En particulier, nous allons introduire les notions d'ensembles de générateurs, de dépendance/indépendance linéaire, de bases et de dimension. Nous discuterons également de la notion importante d'espace dual. Le matériel de ce chapitre correspond à peu près à [Tre, §1.2, §3.5, §8.1].

### 3.1 Sous-espaces engendrés et familles génératrices

Rappelons (Définition 1.4.4) que si  $A$  est un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $F$ , alors

$$\text{Span } A = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, c_i \in F, v_i \in A \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}.$$

On écrit parfois  $\text{Span}_F A$  quand on veut mettre l'accent sur le corps.

**Theorem 3.1.1.** *Supposons que  $A$  est un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel  $V$ . Alors  $\text{Span } A$  est un sous-espace de  $V$  et est le plus petit sous-espace de  $V$  contenant  $A$ . Autrement dit*

- (a)  $A \subseteq \text{Span } A$ , et
- (b) si  $W$  est un sous-espace de  $V$  tel que  $A \subseteq W$ , alors  $\text{Span } A \subseteq W$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà noté dans le Théorème 1.5.4 que  $\text{Span } A$  est un sous-espace de  $V$ , il reste donc à prouver qu'il est le plus petit contenant  $A$ . Il est clair que  $A \subseteq \text{Span } A$  puisque chaque élément  $a \in A$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $A$  (avec un seul terme et un seul coefficient). Supposons maintenant que  $W$  est un sous-espace de  $V$  contenant  $A$ . Nous souhaitons montrer que  $\text{Span } A \subseteq W$ . Soit  $v \in \text{Span } A$ . Alors, par définition,

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

pour certains  $c_1, \dots, c_n \in F$  et  $v_1, \dots, v_n \in A$ . Puisque  $A \subseteq W$ , chaque  $v_i \in W$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . Comme  $W$  est un sous-espace, il est donc fermé par multiples scalaires et addition vectoriel, donc  $\sum_{i=1}^n c_i v_i \in W$  c'est à dire  $v \in W$ . Ainsi  $\text{Span } A \subseteq W$  comme souhaité.  $\square$

et

*Remark 3.1.2.* Si nous adoptons la convention selon laquelle  $\text{Span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$ , alors le théorème 3.1.1 reste vrai avec le mot "non vide" supprimé.

**Definition 3.1.3** (Partie génératrice). L'espace  $\text{Span } A$  est appelé le sous-espace de  $V$  engendré par  $A$ . On dit que  $A$  est une *famille génératrice* pour  $\text{Span } A$ , et on dit que  $A$  engendre  $\text{Span } A$ . Donc, si  $\text{Span } A = V$ , alors nous dirons que  $A$  engendre  $V$ .

**Theorem 3.1.4.** *Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire et que  $A$  est un sous-ensemble de  $V$ . Alors  $\text{Span } T(A) = T(\text{Span } A)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $A \subseteq \text{Span } A$ , nous avons  $T(A) \subseteq T(\text{Span } A)$ . De plus, puisque  $\text{Span } A$  est un sous-espace de  $V$ , nous savons que  $T(\text{Span } A)$  est un sous-espace de  $W$  par le théorème 2.2.2. Donc, d'après le théorème 3.1.1,  $\text{Span } T(A) \subseteq T(\text{Span } A)$ .

Il reste à prouver l'inverse dans l'inclusion. Comme  $T(A) \subseteq \text{Span } T(A)$ , nous avons  $A \subseteq T^{-1}(\text{Span } T(A))$ . De plus, puisque  $\text{Span } T(A)$  est un sous-espace de  $W$ , nous savons que  $T^{-1}(\text{Span } T(A))$  est un sous-espace de  $V$  par le théorème 2.2.2. Ainsi, par Théorème 3.1.1, nous avons  $\text{Span } A \subseteq T^{-1}(\text{Span } T(A))$ . Ainsi  $T(\text{Span } A) \subseteq \text{Span } T(A)$ .  $\square$

**Corollary 3.1.5.** *Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire surjective et que  $A$  génère  $V$ , alors  $T(A)$  génère  $W$ .*

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned} W &= T(V) && \text{(puisque } T \text{ est surjectif)} \\ &= T(\text{Span } A) && \text{(puisque } A \text{ génère } V) \\ &= \text{Span } T(A) && \text{(par Théorème 3.1.4).} \end{aligned}$$

Par conséquent  $T(A)$  génère  $W$ .  $\square$

## Exercises.

3.1.1 ([Ber14, Ex. 3.1.1]). Si  $T: V \rightarrow W$  est linéaire et  $A$  est un sous-ensemble de  $V$  tel que  $T(A)$  génère  $W$ , alors  $T$  est surjectif.

3.1.2 ([Ber14, Ex. 3.1.3]). Supposons que  $x, x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs tels que  $x$  est une combinaison linéaire de  $x_1, \dots, x_n$ , mais pas de  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Montrez que

$$\text{Span}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}, x\}.$$

*Indice :* Lorsque  $x$  est représenté comme une combinaison linéaire de  $x_1, \dots, x_n$ , le coefficient de  $x_n$  ne peut pas être nul.

3.1.3 ([Ber14, Ex. 3.1.4]). Soit  $S: V \rightarrow W$  et  $T: V \rightarrow W$  des applications linéaires, et soit  $A$  un sous-ensemble de  $V$  tel que  $\text{Span } A = V$ . Prouver que, si  $Sx = Tx$  pour tout  $x \in A$ , alors  $S = T$ .

3.1.4. Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire, et soit  $x_1, \dots, x_m$  et  $y_1, \dots, y_n$  deux listes de vecteurs dans  $V$ . Supposer que

- (a)  $x_1, \dots, x_m$  engendrent  $\text{Ker } T$ , et
- (b)  $T(y_1), \dots, T(y_n)$  engendrent  $W$ .

Montrer que la liste  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$  engendrent  $V$ .

## 3.2 Dépendance/indépendance linéaire

**Definition 3.2.1** (Linéairement dépendant/indépendant). Supposons que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  est une liste finie de vecteurs dans un espace vectoriel  $V$ . On dit que la liste est (ou les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eux-mêmes sont) une *famille liée* (ou simplement *dépendant*) s'il existe des scalaires  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tels que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}.$$

et au moins l'un des  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est différent de zéro. Une telle équation (dans laquelle au moins un des  $c_i$  est différent de zéro), est appelée une *relation linéaire* entre les  $v_i$ . On précisera parfois *relation linéaire non-triviale* pour indiquer que au moins un des scalaires  $c_1, \dots, c_n$  est différent de 0.

Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ne sont pas une famille liée, on dit qu'ils forment une *famille libre* (ou qu'ils sont *linéairement indépendants*). Autrement dit, les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants si

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

où  $c_1, \dots, c_n$  sont des scalaires.

*Remark 3.2.2.* Par la commutativité de l'addition vectoriel, l'ordre des vecteurs dans la liste n'est pas important dans la définition de la dépendance/indépendance linéaire.

*Example 3.2.3.* Considérons le cas  $n = 1$ . La liste  $v_1$  est une famille liée si et seulement si  $v_1 = \mathbf{0}$ . En effet, nous avons  $c_1 v_1 = \mathbf{0}$  pour un certain scalaire  $c_1$  non nul si et seulement si  $v_1 = \mathbf{0}$  (par le théorème 1.3.4).

*Example 3.2.4.* Considérons le cas  $n = 2$ . Alors la liste  $v_1, v_2$  est famille liée si et seulement si l'un des vecteurs est multiple de l'autre. Pour voir cela, supposons d'abord que  $v_2 = cv_1$ . Alors  $cv_1 + (-1)v_2 = \mathbf{0}$  est une relation linéaire et donc  $v_1, v_2$  sont une famille liée. Le même argument fonctionne pour le cas où  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ . Supposons maintenant que  $v_1, v_2$  sont une famille liée. Nous avons alors une relation linéaire  $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbf{0}$  où soit  $c_1$  soit  $c_2$  (ou les deux) sont non nul. Si  $c_1 \neq 0$ , alors  $v_1 = (-c_2/c_1)v_2$  et donc  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ . De même, si  $c_2 \neq 0$ , alors  $v_2$  est un multiple de  $v_1$ .

**Lemma 3.2.5.** (a) Toute liste de vecteurs contenant le vecteur zéro est famille liée.



- (b) Si les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ne sont pas distincts (c'est-à-dire qu'un vecteur apparaît plus d'une fois dans la liste), alors ils sont famille liée.

*Démonstration.* Considérons une liste de vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .

- (a) Si  $v_i = \mathbf{0}$  pour certains  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , alors

$$0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n$$

est une relation linéaire donc les vecteurs sont famille liée.

- (b) Si  $v_i = v_j$  pour certains  $1 \leq i < j \leq n$ , alors

$$0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_{j-1} + (-1)v_j + 0v_{j+1} + \dots + v_n$$

est une relation linéaire donc les vecteurs sont famille liée. □

**Corollary 3.2.6.** *Considérons une liste de vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .*

- (a) Si  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants, alors aucun d'entre eux n'est le vecteur zéro.
- (b) Si  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants, alors deux d'entre eux ne sont pas égaux.

**Theorem 3.2.7.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  et  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . On considère l'application linéaire  $T: F^n \rightarrow V$  défini par*

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

(Nous savons d'après le théorème 2.1.4 que cette application est linéaire.) Alors les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont famille liée si et seulement si  $T$  n'est pas injectif.

*Démonstration.* Puisque  $T$  est linéaire, nous avons

$$\begin{aligned} T \text{ n'est pas injectif} &\iff \text{Ker } T \neq \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \exists (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ tel que } T(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{0} \\ &\iff \exists (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ tel que } a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0} \\ &\iff v_1, \dots, v_n \text{ sont famille liée.} \end{aligned} \quad \square$$

**Corollary 3.2.8.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.7, l'application  $T$  est injective si et seulement si les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants.*

**Theorem 3.2.9.** *Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $n \geq 2$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (a)  $v_1, \dots, v_n$  forment une famille liée,
- (b) L'un  $v_j$  est une combinaison linéaire des  $v_i$  avec  $i \neq j$  (c'est-à-dire un vecteur est une combinaison linéaire des autres),
- (c) soit  $v_1 = \mathbf{0}$  soit il existe un indice  $j > 1$  tel que  $v_j$  est une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_{j-1}$ .

*Démonstration.* Vous avez vu ce résultat pour les espaces vectoriels réels dans MAT 1741. La preuve pour les espaces vectoriels sur un corps arbitraire est essentiellement la même et nous allons donc l'omettre. Voir également [Tre, Prop. 2.6].  $\square$

**Corollary 3.2.10.** *Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $n \geq 2$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (a)  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants,
- (b) Aucune  $v_j$  est une combinaison linéaire de  $v_i$  avec  $i \neq j$ ,
- (c)  $v_1 \neq \mathbf{0}$  et pour chaque  $j > 1$ ,  $v_j$  n'est pas une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_{j-1}$ .

*Exemple 3.2.11.* Les vecteurs  $e_1, \dots, e_n \in F^n$  sont linéairement indépendants. En effet :

$$c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = \mathbf{0} \implies (c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

*Exemple 3.2.12.* Considérons les vecteurs  $\sin x, \sin 2x$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . On suppose que

$$a \sin x + b \sin 2x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notez que nous insistons sur le fait que l'égalité vaut pour *tout*  $x \in \mathbb{R}$  puisque l'égalité dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  est l'égalité *de fonctions*. Donc, cela doit être vrai, en particulier, pour  $x = \pi/2$ , et donc

$$a \sin \frac{\pi}{2} + b \sin \frac{2\pi}{2} = 0 \implies a + 0 = 0 \implies a = 0.$$

En prenant  $x = \pi/4$ , donne

$$a \sin \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{2\pi}{4} = 0 \implies 0 \sin \frac{\pi}{4} + b = 0 \implies b = 0.$$

Ainsi, les vecteurs  $\sin x, \sin 2x$  sont linéairement indépendants.

**Theorem 3.2.13.** *Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire injective et  $v_1, \dots, v_n$  sont des vecteurs linéairement indépendants dans  $V$ , alors  $Tv_1, \dots, Tv_n$  sont linéairement indépendants dans  $W$ .*

*Démonstration.* Pour les scalaires  $c_1, \dots, c_n$ , nous avons

$$\begin{aligned} c_1(Tv_1) + \dots + c_n(Tv_n) &= \mathbf{0} \\ \implies T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) &= \mathbf{0} && (T \text{ est linéaire}) \\ \implies c_1v_1 + \dots + c_nv_n &= \mathbf{0} && (T \text{ est injectif}) \\ \implies c_1 = c_2 = \dots = c_n &= 0 && (\text{les vecteurs } v_1, \dots, v_n \text{ sont linéairement indépendants}). \end{aligned}$$

$\square$

Notez qu'il est très important dans le théorème ci-dessus que  $T$  soit injectif. Par exemple, cela ne serait certainement pas vrai si  $T$  était l'application zéro car alors la liste  $Tv_1, \dots, Tv_n$  contiendrait le vecteur zéro et ne pourrait donc pas être linéairement indépendante.

**Definition 3.2.14** (Dépendance/indépendance linéaire des ensembles). Si  $A$  est un ensemble (éventuellement infini) de vecteurs dans un espace vectoriel  $V$ , on dit que  $A$  est une *famille liée* si une liste finie  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de vecteurs distincts dans  $A$  est famille liée (en d'autres termes, il existe une relation de dépendance impliquant un nombre fini de vecteurs de  $A$ ). Nous disons que  $A$  est *linéairement indépendant* si chaque liste finie de vecteurs distincts dans  $A$  est linéairement indépendante.

## Exercices.

3.2.1 ([Ber14, Ex. 3.2.1]). Soit  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions à valeurs réelles et d'une variable réelle (voir Exemple 1.2.5). Définir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Prouver que les fonctions  $f$ ,  $\sin$  et  $\cos$  sont une famille liée dans  $V$ .

3.2.2. Montrez que dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  et  $(-2, 5, 4)$  sont une famille liée. (Voir Exemple 1.4.8.)

3.2.3. Montrez que les vecteurs  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, -1)$  et  $(1, -1, 2)$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement indépendants.

3.2.4. Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire et que  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs dans  $V$ .

- (a) Si  $x_1, \dots, x_n$  sont famille liée, alors les vecteurs  $Tx_1, \dots, Tx_n$  sont une famille liée dans  $W$ .
- (b) Si les vecteurs  $Tx_1, \dots, Tx_n$  sont linéairement indépendants, alors  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement indépendants.

3.2.5 ([Ber14, Ex. 3.2.7]). Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire injective et  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs dans  $V$  tels que  $Tx_1, \dots, Tx_n$  sont famille liée dans  $W$ , alors  $x_1, \dots, x_n$  est une famille liée dans  $V$ .

3.2.6. Si  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , alors nous définissons une fonction  $\chi_E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (appelée *fonction caractéristique* de  $E$ ) par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus E. \end{cases}$$

Notez que  $\chi_E$  est un vecteur dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Par exemple,  $\chi_\emptyset$  est la fonction zéro (le vecteur zéro dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ) et  $\chi_{\mathbb{R}}$  est la fonction constante avec la valeur 1.

Soit  $A$  et  $B$  des sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  et considérons la liste

$$\ell: \chi_A, \chi_B, \chi_{A \cap B},$$

de vecteurs dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer que si la condition

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \not\subseteq B \text{ et } B \not\subseteq A \quad (*)$$

est satisfaite, alors la liste  $\ell$  est linéairement indépendante.

(b) Montrer que si la condition (\*) n'est pas satisfaite, alors la liste  $\ell$  est une famille liée.

3.2.7. Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on définit  $\delta_y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  par

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Montrez que  $\{\delta_y \mid y \in \mathbb{R}\}$  est un sous-ensemble linéairement indépendant de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . *Noter :* Puisque c'est un sous-ensemble infini, vous devrez utiliser Définition 3.2.14.

3.2.8. Supposons que  $A$  est un ensemble linéairement indépendant de vecteurs dans un espace vectoriel  $V$ . Prouver que chaque sous-ensemble non vide de  $A$  est aussi linéairement indépendant.

3.2.9 ([Ber14, Ex. 3.3.3]). Si  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement indépendants, alors l'implication suivante est vraie :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_1x_1 + \dots + b_nx_n \implies a_i = b_i \text{ pour tous } i = 1, \dots, n.$$

Inversement, si l'implication ci-dessus est vraie, alors les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement indépendants.

3.2.10 ([Ber14, Ex. 3.3.4]). Montrer que si les vecteurs  $x_1, x_2, x_3$  sont linéairement indépendants, alors les vecteurs  $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$  le sont aussi.

3.2.11 ([Ber14, Ex. 3.3.5]). Soit  $a, b, c$  des nombres réels distincts. Montrer que les vecteurs

$$(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$$

dans  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement indépendants. Pouvez-vous proposer une généralisation de ce résultat ?

3.2.12 ([Ber14, Ex. 3.3.7]). (a) Soit  $V$  un espace vectoriel réel ou complexe. Démontrez l'énoncé suivant : Si  $x, y, z$  sont des vecteurs linéairement indépendants dans  $V$ , alors  $x + y, y + z, z + x$  le sont aussi.

(b) Cette affirmation est-elle valable si  $V$  est à la place un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{F}_2$  à deux éléments (voir la définition 1.1.2) ? *Indice :*  $2x = \mathbf{0}$  pour tout vecteur  $x$ .

3.2.13 ([Ber14, Ex. 3.3.11]). Démontrez que les fonctions  $\sin t, \sin 2t$  et  $\sin 3t$  sont linéairement indépendantes.

3.2.14 ([Ber14, Ex. 3.3.12]). Soit  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $u = (1, i)$  et  $v = (i, -1)$ .

(a) Montrer que  $u, v$  sont linéairement indépendants dans  $V$  lorsque  $V$  est considéré comme un espace vectoriel *réel*.

(b) Montrer que  $u, v$  sont famille liée dans  $V$  lorsque  $V$  est considéré comme un espace vectoriel *complexe*.

### 3.3 Espaces vectoriels finiment engendrés

**Definition 3.3.1** (espace vectoriel finiment engendré). Un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $F$  est *finiment engendré* s'il existe un sous-ensemble fini  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  tel que  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ . En d'autres termes,  $V$  est finiment engendré s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs. Dans le cas où  $V$  peut être considéré comme un espace vectoriel sur plusieurs corps (par exemple,  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ ), nous disons que  $V$  est *finiment engendré sur  $F$*  s'il existe un sous-ensemble fini  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$  tel que  $\text{Span}_F\{v_1, \dots, v_n\} = V$ .

*Remark 3.3.2.* Rappelons (Définition 3.1.3) que si  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ , alors on dit que l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est générateur de  $V$  ou engendre  $V$ . Ceci explique le terme "finiment engendré". Plus tard, une fois que nous aurons défini la dimension, nous utiliserons souvent le terme *dimension finie* à la place de *finiment engendré*.

*Examples 3.3.3.* (a) L'espace nul  $\{\mathbf{0}\}$  est finiment engendré car  $\text{Span}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ .

(b)  $F^n$  est finiment engendré sur  $F$  car  $\text{Span}_F\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = F^n$ .

(c)  $\mathcal{P}_n(F) = \text{Span}_F\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  et donc  $\mathcal{P}_n(F)$  est finiment engendré sur  $F$ . Cependant,  $\mathcal{P}(F)$  n'est *pas* finiment engendré. Voir Exercice 3.3.3.

(d)  $\mathbb{C}$  est finiment engendré sur  $\mathbb{C}$  car  $\mathbb{C} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{1\}$ .

(e)  $\mathbb{C}$  est finiment engendré sur  $\mathbb{R}$  car  $\mathbb{C} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i\}$ .

(f)  $\mathbb{R}$  est finiment engendré sur  $\mathbb{R}$  car  $\mathbb{R} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{1\}$ .

(g)  $\mathbb{R}$  n'est *pas* finiment engendré sur  $\mathbb{Q}$  (mais ce n'est pas si facile à voir).

(h)  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  n'est *pas* finiment engendré sur  $\mathbb{R}$ .

*Example 3.3.4.* L'espace vectoriel  $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$  est de type fini sur  $\mathbb{R}$ . En effet, nous pouvons montrer que  $V = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\sin, \cos\}$ . Pour ce faire, nous devons prouver que tout  $f \in V$  peut être écrit comme une combinaison linéaire de  $\sin$  et  $\cos$ . Supposons  $f \in V$  et posons

$$g(x) = f(x) \sin x + f'(x) \cos x.$$

Alors

$$g'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x + f''(x) \cos x - f'(x) \sin x = (f''(x) + f(x)) \cos x = 0.$$

Par conséquent,  $g(x)$  est constant, c'est à dire  $g(x) = a$  (pour tous les  $x \in \mathbb{R}$ ) pour un certain  $a \in \mathbb{R}$ . De même, si

$$h(x) = f(x) \cos x - f'(x) \sin x,$$

alors on peut montrer que  $h'(x) = 0$  (Exercice 3.3.1) et donc  $h(x) = b$  (pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ) pour un certain  $b \in \mathbb{R}$  ( $h$  est une fonction constante). Par conséquent nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Comme  $\det A = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la matrice  $A$  est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} -\sin X & -\cos X \\ -\cos X & \sin X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin X & \cos X \\ \cos X & -\sin X \end{bmatrix}.$$

Multiplier les deux côtés de notre équation matricielle à gauche par  $A^{-1}$  donne

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin X & \cos X \\ \cos X & -\sin X \end{bmatrix} [unB] = \begin{bmatrix} un \sin x + b \cos x \\ un \cos x - b \sin X \end{bmatrix}.$$

Donc  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

*Exemple 3.3.5.* Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  engendre  $V$  et  $v_{n+1} \in V$ , alors  $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$  est dépendant. En effet,  $v_{n+1}$  doit être une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_n$  et donc  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  dépend du théorème 3.2.9.

Sous forme contraposée, nous avons que si  $x_1, \dots, x_n$  sont indépendants, alors  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ne peut pas engendrer  $V$ .

**Theorem 3.3.6.** Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $F$  et  $v_1, \dots, v_n \in V$ . On définit une application linéaire  $T: F^n \rightarrow V$  par

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Alors  $T$  est surjectif si et seulement si  $v_1, \dots, v_n$  engendrent  $V$ .

*Démonstration.* Par définition,  $T$  est surjectif si et seulement si chaque vecteur de  $V$  peut être écrit comme  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ . Ceci est vrai si et seulement si  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ .  $\square$

**Theorem 3.3.7.** Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire surjective et que  $V$  est finiment engendré, alors  $W$  est aussi finiment engendré.

*Démonstration.* Puisque  $V$  est finiment engendré, il existe un sous-ensemble fini  $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  tel que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  engendrent  $V$ . Alors, puisque  $T$  est surjectif,  $T(A) = \{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  engendrent  $W$  par Corollaire 3.1.5. Donc  $W$  est finiment engendré.  $\square$

**Theorem 3.3.8.** Un espace vectoriel  $V$  sur  $F$  est finiment engendré si et seulement s'il existe un entier strictement positif  $n$  et une application linéaire surjective  $T: F^n \rightarrow V$ .

*Démonstration.* Si  $V$  est finiment engendré, alors  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$  pour un sous-ensemble fini  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Alors, par le théorème 3.3.6, il existe une application linéaire surjective  $T: F^n \rightarrow V$ .

Inversement, s'il existe un entier strictement positif  $n$  et une application surjective linéaire  $T: F^n \rightarrow V$ , alors, d'après le théorème 3.3.7,  $V$  est finiment engendré puisque  $F^n$  l'est.  $\square$

## Exercices.

3.3.1. Dans la notation de l'exercice 3.3.4, montrez que  $h'(x) = 0$ .

3.3.2. Les vecteurs  $(2, 1, 1)$ ,  $(3, -1, 1)$ ,  $(10, 5, 5)$  et  $(6, -2, 2)$  engendrent-ils  $\mathbb{R}^3$ ? Justifiez votre réponse.

3.3.3. Prouver que  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  n'est pas finiment engendré sur  $\mathbb{R}$ . *Indice* : Supposons que  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Trouver  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  tel que  $p \notin \text{Span}\{p_1, \dots, p_n\}$ .

3.3.4 ([Ber14, Ex. 3.4.4]). Soit  $V = C^\infty(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ayant des dérivées de tout ordre (voir Exemple 1.2.6) et soit

$$U = \{f \in V \mid f'' = f\},$$

où  $f''$  est la dérivée seconde de  $f$ . Montrer que  $U$  est le sous-espace de  $V$  engendré par les deux fonctions  $t \mapsto e^t$  et  $t \mapsto e^{-t}$ . *Indice* : Si  $f'' = f$ , considérez  $f = \frac{1}{2}(f + f') + \frac{1}{2}(f - f')$ .

## 3.4 Base et dimension

**Definition 3.4.1** (Base). Une liste finie de vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  dans un espace vectoriel  $V$  est appelée une *base* de  $V$  si elle est à la fois libre et génératrice. En d'autres termes, chaque vecteur  $v \in V$  peut être écrit comme une combinaison linéaire

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

(depuis  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ ) et les coefficients  $a_1, \dots, a_n$  sont *unique* par Corollaire 3.2.8. Ces coefficients sont appelés les *coordonnées* de  $v$  par rapport à la base  $v_1, \dots, v_n$ .

On dit aussi que l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base. Si l'on souhaite mettre l'accent sur le corps, on dit que  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $V$  sur  $F$ .

*Exemples 3.4.2.* (a) Pour tout corps  $F$ , l'ensemble  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $F^n$ , appelée la *base canonique*, la *base standard*, ou encore la *base naturelle* de  $F^n$ .

(b) Si  $v_1, \dots, v_n$  sont des vecteurs indépendants dans un espace vectoriel  $V$ , alors  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base de  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ .

(c)  $\{1\}$  est une base de  $\mathbb{C}$  sur le corps  $\mathbb{C}$ .

(d)  $\{1, i\}$  est une base de  $\mathbb{C}$  sur le corps  $\mathbb{R}$ .

(e)  $\{1, t, \dots, t^n\}$  est une base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  sur le corps  $\mathbb{R}$ .

*Exemple 3.4.3.* Supposons que  $v_1, \dots, v_n$  soit une base de  $V$ . Si  $v_{n+1}$  est un vecteur quelconque dans  $V$ , alors  $v_1, \dots, v_{n+1}$  est dépendant (puisque  $v_{n+1}$  est une combinaison linéaire des autres vecteurs et donc l'ensemble est dépendant par le théorème 3.2.9) et n'est donc pas une base. De plus, la liste  $v_1, \dots, v_{n-1}$  ne génère pas (puisque si c'était le cas,  $v_n$  serait une combinaison linéaire des vecteurs de cette liste plus courte et donc  $v_1, \dots, v_n$  ne serait pas indépendant).

**Theorem 3.4.4.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  et que  $v_1, \dots, v_n$  est une liste finie de vecteurs dans  $V$ . On considère l'application linéaire  $T: F^n \rightarrow V$  définie par*

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(a)  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $V$ ,

(b)  $T$  est bijective.

*Démonstration.* Nous avons que  $v_1, \dots, v_n$  est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice. Ceci est vrai si et seulement si  $T$  est injective et surjective par le théorème 3.3.6 et le corollaire 3.2.8.  $\square$

**Corollary 3.4.5.** *Un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $F$  a une base (finie) si et seulement si  $V \cong F^n$  pour un entier strictement positif  $n$ .*

*Démonstration.* Si  $V \cong F^n$ , alors il existe une application linéaire bijective  $T: F^n \rightarrow V$ . Soit  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $F^n$ . Alors  $Te_1, \dots, Te_n$  sont indépendants (par Théorème 3.2.13) et générateurs (par Corollaire 3.1.5) et est donc une base de  $V$ .

Inversement, si  $V$  a une base  $v_1, \dots, v_n$ , alors  $V \cong F^n$  par Théorème 3.4.4.  $\square$

**Theorem 3.4.6.** *Tout espace vectoriel finiment engendré admet une base.*

*Démonstration.* Soit  $V \neq \{0\}$  un espace vectoriel finiment engendré. Nous savons qu'il existe un ensemble fini de vecteurs qui engendre  $V$ . Parmi tous ces ensembles, choisissons-en un de taille minimale, disons  $\{u_1, \dots, u_k\}$ . Donc  $\{u_1, \dots, u_k\}$  engendre  $V$ . Nous allons montrer qu'il est aussi linéairement indépendant (par contradiction). Supposons que cet ensemble soit dépendant. Alors, par Théorème 3.2.9, il existe un  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , tel que  $u_j \in \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k\}$  (où la notation  $\hat{u}_j$  signifie qu'on omet le vecteur  $u_j$ ). Puis  $V = \text{Span}\{u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k\}$ , ce qui contredit la minimalité de  $k$ . Par conséquent,  $\{u_1, \dots, u_k\}$  est indépendant et constitue donc une base (puisqu'il est également générateur par hypothèse).  $\square$

*Remarks 3.4.7.* (a) En réalité, *tout* espace vectoriel (pas seulement ceux qui sont finiment engendrés) admet une base. La preuve de ce fait utilise le lemme de Zorn et sort du cadre de ce cours.

- (b) La preuve ci-dessus montre que nous pouvons obtenir une base en partant d'une famille génératrice. Il suffit simplement de supprimer un vecteur pour chaque relation linéaire jusqu'à ce que les vecteurs restants soient indépendants.
- (c) Un espace vectoriel peut avoir plusieurs bases.

Même si un espace vectoriel peut avoir plus d'une base, deux bases quelconques ont le même nombre de vecteurs, comme nous le verrons (théorème 3.4.9).

**Theorem 3.4.8.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel et*

- $R$  est un sous-ensemble libre de  $V$  avec  $|R| = m$  et
- $S$  est un famille génératrice pour  $V$  avec  $|S| = n$ .

*Alors  $m \leq n$  et il existe un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  avec  $|S'| = n - m$  tel que*

$$V = \text{Span}(R \cup S').$$

*Démonstration.* Nous montrons le résultat par récurrence sur  $m$ . Dans le cas de base  $m = 0$ , nous avons  $R = \emptyset$ . Ainsi, prendre  $S' = S$  donne l'énoncé souhaité.

Pour l'étape de récurrence, nous supposons maintenant que le théorème est vrai pour un entier  $m \geq 0$  (et  $n$  arbitraire). Nous souhaitons montrer qu'il est valable pour  $m + 1$ .



Soit  $R = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$  un sous-ensemble libre de  $V$ . Alors le sous-ensemble  $\{v_1, \dots, v_m\}$  est aussi libre (Exercice 3.2.8). Par conséquent, par l'hypothèse de récurrence, nous avons  $m \leq n$  et il existe un sous-ensemble  $S' = \{u_1, \dots, u_{n-m}\}$  de  $S$  tel que

$$V = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_m\} \cup \{u_1, \dots, u_{n-m}\}).$$

Nous ne pouvons pas avoir  $V = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_m\})$ , car cela impliquerait que  $R$  est une famille liée (puisque nous pourrions écrire  $v_{m+1}$  comme une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_m$ ). Ainsi, nous avons  $n - m \geq 1$ , qui nous donne  $m + 1 \leq n$ , prouvant une partie de notre étape de récurrence.

Comme  $v_{m+1} \in V$ , cela signifie qu'il existe des scalaires  $a_1, \dots, a_m \in F$  et  $b_1, \dots, b_{n-m} \in F$  tels que

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 v_1 + \dots + b_{n-m} u_{n-m}.$$

Nous affirmons que les  $b_1, \dots, b_{n-m}$  ne sont pas tous nuls. En effet, si  $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-m} = 0$ , alors on a

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in \text{Span}(\{v_1, \dots, v_m\}).$$

Ainsi, par Théorème 3.2.9, l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_{m+1}\}$  est linéairement dépendant, contredisant notre hypothèse.

Par ce qui précède, nous pouvons choisir  $1 \leq i \leq n - m$  tel que  $b_i \neq 0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} u_i = & (-b_i^{-1} a_1) v_1 + \dots + (-b_i^{-1} a_m) v_m + b_i^{-1} v_{m+1} + (-b_i^{-1} b_1) u_1 + \dots + (-b_i^{-1} b_{i-1}) u_{i-1} \\ & + (-b_i^{-1} b_{i+1}) u_{i+1} + \dots + (-b_i^{-1} b_{n-m}) u_{n-m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Soit

$$S' = \{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{n-m}\}.$$

Par (3.1), nous avons  $u_i \in \text{Span}(R \cup S')$  et donc

$$\begin{aligned} V &= \text{Span}(\{v_1, \dots, v_m\} \cup \{u_1, \dots, u_{n-m}\}) \\ &= \text{Span}(\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\} \cup \{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{n-m}\}) \\ &= \text{Span}(R \cup S'). \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est valable pour  $|R| = m + 1$ , complétant la preuve de l'étape de récurrence  $\square$ .

Le théorème 3.4.8 nous dit que la taille de tout ensemble de générateur est supérieure à la taille de tout ensemble libre (du même espace vectoriel).

**Theorem 3.4.9.** *Si  $V$  a une base avec des  $n$  éléments, alors toute base de  $V$  a  $n$  éléments.*

*Démonstration.* Supposons que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  et  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  soient deux bases de  $V$ . Puisque  $B$  engendre  $V$  et que  $C$  est libre dans  $V$ , nous avons  $m \leq n$  (par théorème 3.4.8). Étant donné que  $C$  engendre  $V$  et que  $B$  est libre, nous avons également  $n \leq m$ . D'où  $m = n$ .  $\square$

**Definition 3.4.10** (Dimension). Supposons que  $V$  est un espace vectoriel finiment engendré. Si  $V \neq \{0\}$ , alors le nombre de vecteurs dans n'importe quelle base de  $V$  est appelé la *dimension* de  $V$  et s'écrit  $\dim V$ . Si  $V = \{0\}$ , on dit  $\dim V = 0$ . Si l'on souhaite mettre l'accent sur le corps  $F$ , on note  $\dim_F V$  pour la dimension de  $V$  sur  $F$ . Les espaces vectoriels finiment engendrés sont aussi appelés espace vectoriel de *dimension finie*. Si  $V$  n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est *dimension infinie*.

*Exemples 3.4.11.* (a)  $\dim_F F^n = n$ . (Voir Exercice 3.4.2.)

(b)  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ .

(c)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .

(d)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ .

(e)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) = 2(n + 1)$ .

**Lemma 3.4.12.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel. Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  engendrent  $V$ , alors  $\dim V \leq n$ . Si  $\{w_1, \dots, w_m\}$  est libre, alors  $m \leq \dim V$ .*

*Démonstration.* Cela découle du théorème 3.4.8. □

**Lemma 3.4.13.** *Supposons que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est libre et que  $v$  est un vecteur. Alors  $\{v, v_1, \dots, v_n\}$  est libre si et seulement si  $v \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ .*

*Démonstration.* Nous prouvons la contraposée : que  $\{v, v_1, \dots, v_n\}$  est dépendant si et seulement si  $v \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . Nous savons déjà par le théorème 3.2.9 que si  $v \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ , alors  $\{v, v_1, \dots, v_n\}$  est dépendante. Supposons maintenant que  $\{v, v_1, \dots, v_n\}$  soit dépendante. Alors il y a des scalaires  $a, a_1, \dots, a_n$ , non tous nuls, tels que

$$av + a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Si  $a = 0$ , alors  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$ . Puisque  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est indépendante, nous avons  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . Cela contredit le fait que  $a, a_1, \dots, a_n$  ne sont pas tous nuls. Donc  $a \neq 0$ . Alors

$$v = -a^{-1}a_1v_1 - \dots - a^{-1}a_nv_n \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}. \quad \square$$

**Theorem 3.4.14.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  une famille de vecteur ayant  $n$  éléments. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

(a)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est génératrice.

(b)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est libre.

(c)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base.

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) : supposons que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  engendrent  $V$  mais est linéairement dépendante. Alors il existe un  $i$  tel que  $V = \text{Span}\{v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$ . Mais alors  $V$  a un ensemble générateur avec  $n - 1$  éléments. Mais cela contredit le lemme 3.4.12. Ainsi, on a (b).

(b)  $\Rightarrow$  (a) : supposons que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est indépendant mais n'engendrent pas  $V$ . On peut alors trouver un vecteur  $v \in V$  tel que  $v \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . Alors, d'après le lemme 3.4.13,  $\{v, v_1, \dots, v_n\}$  est un ensemble indépendant de  $n+1$  éléments. Mais cela contredit le lemme 3.4.12. Ainsi, (a) tient.

Il est maintenant clair que (a) et (b) sont équivalents à (c). □

*Remark 3.4.15.* Le point du théorème ci-dessus est que si nous connaissons la dimension d'un espace vectoriel à l'avance, pour montrer qu'un ensemble ayant le bon nombre d'éléments est une base, nous n'avons qu'à vérifier *une* des deux propriétés définissant une base (libre ou génératrice).

*Example 3.4.16.* Nous savons que  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ . Comme l'ensemble  $\{1, 1 + i\}$  est linéairement indépendant (Exercice 3.4.1), c'est une base.

*Example 3.4.17.* Nous avons montré dans l'Exemple 3.3.4 que

$$W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = \text{Span}\{\sin, \cos\}.$$

On peut aussi vérifier que  $\sin$  et  $\cos$  sont linéairement indépendants (Exercice 3.4.3). Ainsi  $\dim W = 2$ .

Si on pose maintenant

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ g(x) &= \sin x - \cos x. \end{aligned}$$

Alors  $f$  et  $g$  sont libre (Exercice 3.4.3). Et donc  $\{f, g\}$  est une base de  $W$ .

*Example 3.4.18.* Soit

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\} = \text{Span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

(Vous avez appris à résoudre des systèmes linéaires comme celui-ci dans MAT 1741). De plus,

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

est libre (il s'agit d'un ensemble de deux vecteurs, et aucun vecteur n'est un multiple de l'autre). Ainsi  $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  est une base de  $U$  et donc  $\dim U = 2$ .

Comme  $(1, 1, -2)$ ,  $(0, 1, -1)$  appartiennent tous deux à  $U$  et sont linéairement indépendants,

$$\{(1, 1, -2), (0, 1, -2)\}$$

est une autre base de  $U$ .

**Lemma 3.4.19.** *Chaque ensemble linéairement indépendant de vecteurs dans un espace vectoriel finiment engendré  $V$  peut être étendu à une base de  $V$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $V$  est un espace vectoriel finiment engendré et que  $n = \dim V$ . Soit  $R$  un ensemble linéairement indépendant de vecteurs dans  $V$ . Choisissez une base  $S$  de  $V$ . Par théorème 3.4.8, il existe un sous-ensemble  $S'$  de  $S$  avec  $|S'| = n - m$  et  $V = \text{Span}(R \cup S')$ . Par le lemme 3.4.12,  $|R \cup S'| \geq n$ . D'autre part,  $n = |R| + |S'| \geq |R \cup S'|$ . Ainsi  $|R \cup S'| = n$ . Ainsi, par le théorème 3.4.14,  $R \cup S'$  est une base de  $V$ .  $\square$

**Theorem 3.4.20.** *Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $V \cong W$  si et seulement si  $\dim V = \dim W$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\dim V = n$ . Alors  $V$  a une base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  avec  $n$  vecteurs. Si  $V \cong W$ , alors il existe un isomorphisme  $T: V \rightarrow W$ . Alors  $Tv_1, \dots, Tv_n$  engendrent  $W$  (Corollaire 3.1.5) et est libre (Théorème 3.2.13). Alors  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  est une base de  $W$  et donc de  $\dim W = n = \dim V$ .

Supposons que  $\dim W = \dim V = n$ . Alors  $W$  a une base  $\{w_1, \dots, w_n\}$  avec des éléments  $n$ . Par le théorème 3.4.4,  $V \cong F^n$  et  $W \cong F^n$ . D'où  $V \cong W$  par théorème 2.4.12.  $\square$

**Theorem 3.4.21.** *Supposons que  $W$  est un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Alors*

- (a)  $W$  est de dimension finie et  $\dim W \leq \dim V$ , et
- (b)  $\dim W = \dim V$  si et seulement si  $W = V$ .

*Démonstration.* Soit  $n = \dim V$ . Si  $W = \{\mathbf{0}\}$ , alors le théorème est trivialement vrai. Par conséquent, supposons  $W \neq \{\mathbf{0}\}$ . D'où  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  et  $n \geq 1$ . Choisissez  $w_1 \in W$ ,  $w_1 \neq 0$ . Alors  $\{w_1\}$  est libre. Si  $\text{Span}\{w_1\} = W$ , alors  $W$  est finiment engendré. Sinon, choisissez  $w_2 \in W$  tel que  $w_2 \notin \text{Span}\{w_1\}$ . Alors  $\{w_1, w_2\}$  est libre. On peut répéter cette construction pour continuer d'étendre cette liste. D'après le lemme 3.4.12, ce processus doit s'arrêter et on obtient ainsi une liste  $\{w_1, \dots, w_k\}$  qui est à la fois libre et engendrent  $W$ , avec  $k \leq n$ . Par conséquent,  $\dim W \leq \dim V$ . Si  $\dim W = \dim V$  (c'est-à-dire  $k = n$ ), alors  $\{w_1, \dots, w_k\}$  doit engendrer  $V$  puisqu'il est indépendant (théorème 3.4.14) et donc  $W = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} = V$ . Il est clair que si  $W = V$ , alors  $\dim W = \dim V$ .  $\square$

*Exemple 3.4.22.* Prendre

$$V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble  $\{1 - t\}$  est indépendant dans  $V$  (puisque  $1 - t$  n'est pas le polynôme nul, par exemple  $1 - t \neq 0$  à  $t = 0$ ). Depuis  $\text{Span}\{1 - t\} \neq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , nous continuons. Choisissez un polynôme, par exemple,  $t \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , mais  $t \notin \text{Span}\{1 - t\}$ . Alors  $\{1 - t, t\}$  est linéairement indépendant. Est-ce que  $\text{Span}\{1 - t, t\} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ? Non (par exemple  $t^2 \notin \text{Span}\{1 - t, t\}$ ). Alors l'ensemble  $\{1 - t, t, t^2\}$  est indépendant dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Comme  $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$ , nous savons que  $\{1 - t, t, t^2\}$  est une base.

---

## Exercices.

3.4.1. Montrer que les nombres complexes  $1$  et  $1 + i$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

3.4.2. Supposons que  $F$  est un corps.

- (a) Prouver que  $\dim_F F^n = n$ .
- (b) Prouver que  $F^n \cong F^m$  si et seulement si  $m = n$ .

3.4.3. Cet exercice concerne l'Exemple 3.4.17.

- (a) Montrer que  $\sin$  et  $\cos$  sont des éléments linéairement indépendants (sur  $\mathbb{R}$ ) de l'ensemble  $W$ . *Indice* : Écrivez une combinaison linéaire arbitraire et supposez qu'elle est égale à la fonction zéro. Ensuite, évaluez les fonctions à des points soigneusement sélectionnés qui vous permettent de conclure que les coefficients de votre combinaison linéaire doivent être nuls.
- (b) Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéairement indépendants.

3.4.4 ([Ber14, Ex. 3.5.5]). Soit  $\alpha$  un nombre réel. Montrer que les vecteurs

$$u = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \text{et} \quad v = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

sont une base de  $\mathbb{R}^2$ .

3.4.5 ([Ber14, Ex. 3.5.6]). Vrai ou faux (expliquez) : Si  $x_1, x_2, x_3$  est une base de  $V$ , alors  $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$  l'est aussi.

- 3.4.6 ([Ber14, Ex. 3.5.7]). (a) Dans  $\mathbb{R}^2$ , trouver les coordonnées du vecteur  $(2, 3)$  par rapport à la base  $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ .
- (b) Dans  $\mathbb{R}^n$ , trouver les coordonnées du vecteur  $(a_1, \dots, a_n)$  par rapport à la base canonique  $e_1, \dots, e_n$  (voir Exemple 1.4.8).

3.4.7 ([Ber14, Ex. 3.5.8]). Si  $x_1 = (1, 2, 0)$ ,  $x_2 = (2, 1, 0)$  et  $x_3 = (a, b, 1)$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels, prouvez que  $x_1, x_2, x_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3.4.8. Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, avec  $V$  de dimension finie. Prouver que  $\dim T(U) \leq \dim U$  pour tout sous-espace  $U$  de  $V$ .

3.4.9. Trouver une base du sous-espace

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$

de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la dimension de  $U$ ? *Noter* : C'est vraiment une question de MAT 1741. Elle est là pour vous rafraîchir la mémoire.

3.4.10. Supposons que  $v_1, \dots, v_n$  (où  $n \geq 2$ ) est une base d'un espace vectoriel  $V$ . Choisissez  $r \in \{1, \dots, n-1\}$  et définissez

$$M = \text{Span}\{v_1, \dots, v_r\},$$

$$N = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}.$$

Montrez que  $V = M \oplus N$ .

3.4.11. Supposons que  $U$  est un sous-espace d'un espace vectoriel de type fini  $V$ . Montrer que  $U$  a un supplémentaire. Autrement dit, montrer qu'il existe un sous-espace  $W$  de  $V$  tel que  $U \oplus W = V$ .

3.4.12 ([Ber14, Ex. 3.5.13]). Montrer que si  $x_1, \dots, x_n$  est une base de  $V$  et que  $a_1, \dots, a_n$  sont des scalaires non nuls, alors  $a_1x_1, \dots, a_nx_n$  est aussi une base de  $V$ .

3.4.13 ([Ber14, Ex. 3.5.14]). Prouver que si  $x_1, x_2, x_3$  est une base de  $V$  et  $a_1, a_2, a_3$  sont des scalaires non nuls, alors la liste

$$a_1x_1, \quad a_1x_1 + a_2x_2, \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

est aussi une base de  $V$ . *Indice* : Combinez les exercices 3.4.5 et 3.4.12.

3.4.14. Supposons que  $F$  est un corps fini avec  $q$  éléments. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $F$ . Combien d'éléments contient  $V$ ? N'oubliez pas de justifier votre réponse.

3.4.15 ([Ber14, Ex. 3.5.20]). Soit  $V$  un espace espace vectoriel complexe de dimension finie. Prouver que  $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$ . *Indice* : Comme espaces vectoriels complexes,  $V \cong \mathbb{C}^n$  pour certains  $n$ .

## 3.5 Le théorème du rang

**Theorem 3.5.1** (Théorème du rang). *Si  $V$  est un espace espace vectoriel de dimension finie et  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors*

$$\dim V = \dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Ker } T).$$

*Démonstration.* Par le corollaire 2.2.4,  $\text{Ker } T$  est un sous-espace de  $V$ , et donc de dimension finie par le théorème 3.4.21. On choisit une base  $B' = \{v_1, \dots, v_k\}$  de  $\text{Ker } T$ . Par le lemme 3.4.19, on peut l'étendre en une base  $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_n\}$  de  $V$ .

Soit  $w \in T(V)$ . On a donc  $w = T(v)$  pour un certain  $v \in V$ . Puisque  $B$  est une base de  $V$ , nous pouvons écrire

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i, \quad c_1, \dots, c_n \in F.$$

Alors

$$w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i) = \sum_{i=k+1}^n c_i T(v_i).$$

Par conséquent,

$$T(V) = \text{Span}\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}.$$

Nous affirmons que  $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$  est linéairement indépendant et forme donc une base de  $T(V)$ . En effet, supposons

$$c_{k+1}T(v_{k+1}) + \dots + c_n T(v_n) = 0$$

pour des scalaires  $c_{k+1}, \dots, c_n \in F$ . Alors

$$T(c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_n v_n) = c_{k+1}T(v_{k+1}) + \dots + c_n T(v_n) = 0,$$

et donc  $c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_n v_n \in \text{Ker } T$ . Puisque  $B'$  est une base de  $\text{Ker } T$ , nous avons

$$c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_n v_n = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

pour des scalaires  $c_1, \dots, c_k \in F$ . Mais alors

$$-c_1v_1 - \dots - c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_nv_n = 0.$$

Puisque  $B$  est une base, c'est en particulier une famille libre, d'où  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

Enfin, en comptant le nombre d'éléments de base, nous avons

$$\dim V = n, \quad \dim(\text{Ker } T) = k, \quad \dim T(V) = n - k.$$

D'où  $\dim V = \dim T(V) + \dim(\text{Ker } T)$ , comme souhaité.  $\square$

**Definition 3.5.2** (Rang et nullité). Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, nous définissons le *rang* de  $T$  comme

$$\text{rang } T = \dim T(V),$$

et la *nullité* de  $T$  comme

$$\text{null } T = \dim(\text{Ker } T).$$

Nous pouvons maintenant reformuler le théorème 3.5.1 comme

$$\text{rang } T + \text{null } T = \dim V, \tag{3.2}$$

où  $V$  est le domaine de l'application linéaire  $T$ . L'équation (3.2) est appelé le *théorème du rang* ou *théorème de la dimension*.

**Corollary 3.5.3.** Si  $T: V \rightarrow W$  est linéaire, et  $\dim V = \dim W < \infty$ , alors

$$T \text{ est un isomorphisme} \iff T \text{ est injectif} \iff T \text{ est surjectif}.$$

*Démonstration.* Si  $T$  est un isomorphisme, il est injectif et surjectif (par définition). Supposons que  $T$  est injectif, c'est à dire  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$  et ainsi

$$\dim T(V) = \dim V = \dim W$$

par le théorème du rang. Donc  $T(V) = W$  (puisque  $T(V)$  est un sous-espace de  $W$ , on peut appliquer le Théorème 3.4.21). Enfin, supposons que  $T$  est surjectif. Puis  $T(V) = W$  et donc  $\text{rang } T = \dim W = \dim V$ . D'après le théorème du rang,  $\text{null } T = 0$  et donc  $T$  est injectif, donc un isomorphisme.  $\square$

**Theorem 3.5.4.** Si  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors  $V = V_1 \times \dots \times V_n$  l'est aussi et

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n.$$

*Démonstration.* Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , soit  $B_i$  une base de  $V_i$ , et soit

$$B'_i = \{(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \mid v \in B_i\} \subseteq V,$$

où le  $v$  apparaît dans la  $i$ -ème position. Nous le laissons en exercice (Exercice 3.5.1) la preuve que

$$B := B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n$$

est une base de  $V$ . Puisque chaque  $B_i$  a des éléments  $\dim V_i$ ,  $B$  a des éléments  $\sum_{i=1}^n \dim V_i$ , et le théorème suit.  $\square$

**Theorem 3.5.5.** *Un système de  $m$  équations linéaires homogènes à  $n$  inconnues, avec  $n > m$ , a toujours une solution non triviale.*

*Démonstration.* Comme vous l'avez vu dans MAT 1741, un tel système équivaut à une équation matricielle

$$Ax = \mathbf{0},$$

où  $A$  est la matrice de coefficients, et donc  $m \times n$ . L'application

$$T: F^n \rightarrow F^m, \quad T(x) = Ax,$$

est linéaire (puisque'il s'agit d'une multiplication par une matrice). L'ensemble des solutions est précisément le noyau de  $T$ . Par le théorème 3.5.1, on a

$$\dim T(F^n) + \dim \text{Ker } T = \dim F^n = n \implies \dim \text{Ker } T = n - \dim T(F^n) \geq n - m > 0.$$

Ici, nous avons utilisé  $T(F^n) \subseteq F^m$  et donc  $\dim T(F^n) \leq \dim F^m = m$ . Donc  $\dim \text{Ker } T > 0$ , ce qui signifie que  $\text{Ker } T$  n'est pas l'espace vectoriel nul et donc il y a des éléments non nuls dans le noyau de  $T$  (qui correspondent à des solutions non triviales du système homogène).  $\square$

**Theorem 3.5.6.** *Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie.*

- (a) *Si  $T$  est injectif, alors  $\dim V \leq \dim W$ .*
- (b) *Si  $T$  est surjectif, alors  $\dim V \geq \dim W$ .*
- (c) *Si  $T$  est bijectif, alors  $\dim V = \dim W$ .*

*Démonstration.* (a) Si  $T$  est injectif, alors  $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}\}$ . Ainsi

$$\dim V = \dim T(V) + \dim \text{Ker } T = \dim T(V) + 0 \leq \dim W.$$

(b) Si  $T$  est surjectif, alors  $T(V) = W$ . Ainsi

$$\dim V = \dim T(V) + \dim \text{Ker } T = \dim W + \dim \text{Ker } T \geq \dim W.$$

(c) Cela découle immédiatement des deux parties précédentes.  $\square$

## Exercices.

3.5.1. Montrer que  $B$ , tel que défini dans la preuve du Théorème 3.5.4 est une base de  $V$ .

3.5.2 ([Ber14, Ex. 3.6.1]). Existe-t-il une application linéaire  $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont le noyau est de dimension 3?



3.5.3. Pour cet exercice, la notation  $U \xrightarrow{T} V$  signifie que  $T$  est une application de  $U$  à  $V$  (c'est-à-dire que  $T: U \rightarrow V$ ).

Soit

$$\{\mathbf{0}\} \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} \{\mathbf{0}\}$$

des applications linéaires satisfaisant :

$$\text{Im } T_{i-1} = \text{Ker } T_i \quad \text{pour tous } i = 1, 2, 3.$$

(a) Montrer que  $T_1$  est injectif et que  $T_2$  est surjectif.

(b) Montrez que  $\sum_{i=1}^3 (-1)^i \dim V_i = 0$ .

3.5.4 ([Ber14, Ex. 3.6.14]). Soient  $T: V \rightarrow W$  et  $S: W \rightarrow U$  des applications linéaires, avec  $V$  de dimension finie.

(a) Si  $S$  est injectif, alors  $\text{Ker } ST = \text{Ker } T$  et  $\text{rang}(ST) = \text{rang}(T)$ .

(b) Si  $T$  est surjectif, alors  $\text{Im } ST = \text{Im } S$  et  $\text{null}(ST) - \text{null}(S) = \dim V - \dim W$ .

3.5.5 ([Ber14, Ex. 3.7.3]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $S, T \in \mathcal{L}(V)$ . Démontrez les affirmations suivantes.

(a)  $\text{rang}(S+T) \leq \text{rang } S + \text{rang } T$ . *Indice* : Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-espaces de  $V$ , utilisez l'application  $M \times N \rightarrow M + N$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$ , pour montrer que  $\dim(M + N) \leq \dim M + \dim N$ .

(b)  $\text{rang}(ST) \leq \text{rang } S$  et  $\text{rang}(ST) \leq \text{rang } T$ .

(c)  $\text{null}(S + T) \geq \text{null } S + \text{null } T - \dim V$ .

3.5.6 ([Ber14, Ex.3.7.6]). Soit  $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions polynomiales réelles (voir Exemple 1.2.8). Soit  $S, T \in \mathcal{L}(V)$  les applications linéaires telles que  $Tp = p'$  et  $Sp$  est la primitive de  $p$  de terme constant zéro. Montrez que  $TS = I$ . est-ce que  $T$  est bijective ?

3.5.7 ([Ber14, Ex.3.7.7]). Soit  $V$  un espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie) et supposons que  $R, S, T \in \mathcal{L}(V)$  sont tels que  $ST = I$  et  $TR = I$ . Prouver que  $T$  est bijectif et  $R = S = T^{-1}$ . *Indice* : Considérez  $(ST)R$ .

## 3.6 Dimensions des espaces des applications linéaires

**Theorem 3.6.1.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $W$  un espace vectoriel arbitraire (éventuellement de dimension infinie). Soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$  et  $w_1, \dots, w_n$  n'importe quel vecteurs dans  $W$ , alors il existe une unique application linéaire  $T: V \rightarrow W$  telle que  $Tv_i = w_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration. Existence* : On sait par le théorème 2.1.4 que les applications  $R: F^n \rightarrow V$  et  $S: F^n \rightarrow W$  définies par

$$\begin{aligned} R(a_1, \dots, a_n) &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \\ S(a_1, \dots, a_n) &= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n, \end{aligned}$$

sont linéaires. Il est clair que si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $F^n$ , alors

$$Re_i = v_i, \quad Se_i = w_i.$$

Puisque  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base de  $V$ ,  $R$  est bijective par le théorème 3.4.4. Donc  $R$  est inversible et  $R^{-1}$  est linéaire par le théorème 2.4.9. Par conséquent, l'application  $T := SR^{-1}$  est linéaire. Depuis

$$Tv_i = SR^{-1}v_i = Se_i = w_i,$$

l'application  $T$  a les propriétés souhaitées.

*Unicité* : Supposons que  $T_1, T_2 : V \rightarrow W$  soit deux applications linéaires avec la propriété donnée. Alors

$$(T_1 - T_2)(v_i) = T_1v_i - T_2v_i = w_i - w_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Puisque  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base de  $V$ , cela signifie que  $T_1 - T_2 = 0$  (l'application zéro). Ainsi  $T_1 = T_2$ .  $\square$

**Corollary 3.6.2.** *Si  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(V, W)$  est aussi de dimension finie et*

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W).$$

*Démonstration.* Soit  $n = \dim V$  et soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ . On Définit une application

$$\Phi : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow W^n = W \times W \times \dots \times W, \quad \Phi(T) = (Tv_1, \dots, Tv_n).$$

Alors  $\Phi$  est linéaire (Exercice 3.6.1) et bijective par le théorème 3.6.1. Donc  $\Phi$  est un isomorphisme d'espace vectoriel et donc

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim W^n = n(\dim W) = (\dim V)(\dim W).$$

(Dans la première égalité, nous avons utilisé le théorème 3.5.4).  $\square$

## Exercices.

3.6.1. Montrer que l'application  $\Phi$  définie dans la preuve du corollaire 3.6.2 est linéaire.

3.6.2. Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $F$  et  $\dim \mathcal{L}(V, W) = 11$ . Montrez que  $V \cong F$  ou  $W \cong F$ .

3.6.3 ([Ber14, Ex. 3.8.2]). Vrai ou faux (expliquez) :  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^6$ .

3.6.4 ([Ber14, Ex. 3.8.3]). Si  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie, prouver que  $\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{L}(W, V)$ . *Indice* : Ne cherchez pas une application  $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(W, V)$ .

3.6.5 ([Ber14, Ex. 3.8.7]). Montrer que si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $T \in \mathcal{L}(V)$ , alors il existe un entier strictement positif  $r$  et des scalaires  $a_0, a_1, \dots, a_r$  (pas tous nuls) tels que

$$a_0v + a_1Tv + a_2T^2v + \dots + a_rT^rv = \mathbf{0}, \quad \forall v \in V.$$

3.6.6 ([Ber14, Ex. 3.8.8]). Soit  $x_1, \dots, x_n$  une base de  $V$  et, pour chaque paire d'indices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $E_{i,j} \in \mathcal{L}(V)$  l'application linéaire donnée par

$$E_{i,j}x_k = \begin{cases} x_i & \text{si } j = k, \\ \mathbf{0} & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Démontrez les déclarations suivantes :

- (a)  $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$  ;
- (b)  $E_{i,j}E_{h,k} = \mathbf{0}$  si  $j \neq h$  ;
- (c)  $E_{1,1} + E_{2,2} + \dots + E_{n,n} = I$ .

## 3.7 Espace dual

Rappelons (définition 2.1.10) que si  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  alors l'espace dual de  $V$ , est l'espace des formes linéaires

$$V^* = \mathcal{L}(V, F).$$

*Remark 3.7.1.* Certaines références utilisent la notation  $V'$  au lieu de  $V^*$ .

**Theorem 3.7.2.** Si  $\dim V < \infty$ , alors  $\dim V^* = \dim V$ .

*Démonstration.* Cela découle du corollaire 3.6.2 :

$$\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V, F) = (\dim V)(\dim F) = (\dim V) \cdot 1 = \dim V. \quad \square$$

**Proposition 3.7.3** (Existence de bases duales). Supposons que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  soit une base d'un espace vectoriel  $V$ . Alors il existe une base  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de  $V^*$  telle que

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

(Le symbole  $\delta_{ij}$  est appelé le symbole delta de Kronecker.)

*Démonstration.* Pour  $i = 1, \dots, n$ , définissons

$$f_i: V \rightarrow F, \quad f_i\left(\sum_{j=1}^n c_j v_j\right) = c_i. \quad (3.3)$$

Alors chaque  $f_i$  est linéaire (Exercice 3.7.1) et donc  $f_i \in V^*$ . De plus, nous avons

$$f_i(v_j) = f_i(0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n) = \delta_{ij}.$$

Comme on sait par le Théorème 3.7.2 que  $\dim V^* = n$ , pour montrer que  $\{f_1, \dots, f_n\}$  est une base, il suffit de montrer que cet ensemble est linéairement indépendant (Théorème 3.4.14). Maintenant, pour  $c_1, \dots, c_n \in F$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0 &\implies \sum_{j=1}^n c_j f_j(v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\implies \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ji} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\implies c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ainsi  $\{f_1, \dots, f_n\}$  est linéairement indépendant et nous avons donc terminé.  $\square$

**Definition 3.7.4** (Base dual). Nous appelons  $\{f_1, \dots, f_n\}$  la *base dual* de la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

*Example 3.7.5.* Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $F^n$ , alors la base duale de  $(F^n)^*$  est  $\{f_1, \dots, f_n\}$  où

$$f_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$$

est la *fonction  $i$ -ème coordonnée*.

Si  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par  $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$  (donc  $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ ), alors

$$f = f_1 - 2f_2 + 3f_3.$$

**Theorem 3.7.6.** *Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire. Alors l'application  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  définie par*

$$T^*g = g \circ T, \quad g \in W^*$$

*est linéaire.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ & \searrow g \circ T & \downarrow g \\ & & F \end{array}$$

*Démonstration.* Notez d'abord que, pour  $g \in W^* = \mathcal{L}(W, F)$ , la composition  $g \circ T$  est bien une application linéaire de  $V$  à  $F$  par le théorème 2.3.13, c'est-à-dire que nous avons  $g \circ T \in V^*$ .

Nous devons montrer que  $T^*$  est linéaire. Supposons que  $g, h \in W^*$  et  $c, d$  soient des scalaires. Alors pour tout  $v \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} (T^*(cg + dh))(v) &= ((cg + dh)T)(v) \\ &= (cg + dh)(Tv) \\ &= c(g(Tv)) + d(h(Tv)) \\ &= c(gT)(v) + d(hT)(v) \\ &= c(T^*g)(v) + d(T^*h)(v) \\ &= (cT^*g + dT^*h)(v). \end{aligned}$$

Ainsi  $T^*(cg + dh) = cT^*g + dT^*h$ . Donc  $T^*$  est linéaire.  $\square$

**Definition 3.7.7** (Transposer). L'application  $T^*$  est appelée la *transposée* de l'application  $T$ .

*Remark 3.7.8.* Nous verrons plus tard que la transposée d'une application linéaire est étroitement liée à la transposée d'une matrice (que vous avez apprise dans MAT 1741).

**Theorem 3.7.9.** Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors

$$\text{Ker } T^* = \{g \in W^* \mid g(w) = 0 \forall w \in T(V)\}.$$

*Démonstration.* Si  $g \in W^*$ , alors

$$\begin{aligned} g \in \text{Ker } T^* &\iff T^*g = 0 \iff gT = 0 \iff (gT)(v) = 0 \forall v \in V \\ &\iff g(Tv) = 0 \forall v \in V \iff g(w) = 0 \forall w \in T(V). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 3.7.10** (Annihilateur). Si  $M$  est un sous-espace de  $V$ , alors l'*annihilateur* de  $M$  dans  $V^*$  est

$$M^\circ := \{f \in V^* \mid f(w) = 0 \forall w \in M\} = \{f \in V^* \mid f = 0 \text{ sur } M\}.$$

Notez que  $M^\circ$  est un sous-espace de  $V^*$ .

En utilisant la terminologie ci-dessus, le résultat du théorème 3.7.9 est

$$\text{Ker } T^* = T(V)^\circ = (\text{Im } T)^\circ. \quad (3.4)$$

**Theorem 3.7.11.** Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels de dimension finie. Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors  $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\circ$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in \text{Im } T^*$ . Puis  $f = T^*g$  pour certains  $g \in W^*$ . Ainsi

$$f(v) = (T^*g)(v) = gTv \forall v \in V.$$

Alors

$$v \in \text{Ker } T \implies Tv = 0 \implies f(v) = g(0) = 0.$$

Donc  $\text{Im } T^* \subseteq (\text{Ker } T)^\circ$ .

Supposons maintenant  $f \in (\text{Ker } T)^\circ$ . On veut trouver un  $g \in W^*$  tel que  $f = T^*g$ . Soit  $\{v_1, \dots, v_k\}$  une base de  $\text{Ker } T$  et étendons ceci à une base  $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$  de  $V$ . Nous savons que  $\{Tu_1, \dots, Tu_l\}$  est une base de  $\text{Im } T$ . (Nous l'avons montré dans notre preuve du théorème du rang (théorème 3.5.1). On peut l'étendre en une base  $\{Tu_1, \dots, Tu_l, w_1, \dots, w_p\}$  de  $W$ . On définit maintenant  $g \in W^*$  comme suit. Pour les scalaires  $c_1, \dots, c_l, a_1, \dots, a_p$ , définissez

$$g(c_1Tu_1 + \dots + c_lTu_l + a_1w_1 + \dots + a_pw_p) = c_1f(u_1) + \dots + c_lf(u_l) = f(c_1u_1 + \dots + c_lu_l).$$

Alors  $g$  est linéaire par le théorème 3.6.1. Nous allons montrer que  $T^*g = f$ . Soit  $x \in V$  et écris  $x = v + u$  avec  $v \in \text{Ker } T$  et  $u \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_l\}$ . Alors

$$(T^*g)(x) = gT(v + u) = gT(u) = f(u).$$

D'autre part,

$$f(x) = f(v + u) = f(v) + f(u) = f(u),$$

depuis  $f \in (\text{Ker } T)^\circ$ . D'où  $T^*g = f$ . Ainsi  $(\text{Ker } T)^\circ \subseteq \text{Im } T^*$  et donc  $(\text{Ker } T)^\circ = \text{Im } T^*$ .  $\square$

En fait, le théorème 3.7.11 est vrai sans les hypothèses selon lesquelles  $V$  et  $W$  sont de dimension finie. Cependant, la preuve du résultat général utilise la notion d'espace quotient (ou des faits plus généraux sur les bases), que nous n'aborderons pas dans ce cours. Voir l'annexe B.2.

**Theorem 3.7.12.** *Si  $U$  est un sous-espace de  $V$  et  $\dim V < \infty$ , alors*

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U = \dim V^* - \dim U^*.$$

*Démonstration.* Soit  $j: U \rightarrow V$  l'application d'inclusion (c'est-à-dire  $j(u) = u$  pour tout  $u \in U$ ). Nous avons

$$\text{Ker } j^* = (\text{Im } j)^\circ \quad \text{et} \quad \text{Im } j^* = (\text{Ker } j)^\circ.$$

Maintenant,  $\text{Im } j = U$  et  $\text{Ker } j = \{\mathbf{0}\}$ . Ainsi

$$\text{Ker } j^* = U^\circ \quad \text{et} \quad \text{Im } j^* = \{\mathbf{0}\}^\circ = U^*$$

(donc  $j^*$  est surjectif). Par le théorème du rang (théorème 3.5.1), nous avons

$$\dim \text{Ker } j^* + \dim \text{Im } j^* = \dim V^*.$$

Ainsi

$$\dim U^\circ + \dim U^* = \dim V^* = \dim V.$$

Comme  $\dim U = \dim U^*$ , le résultat suit. □

**Corollary 3.7.13.** *Si  $T: V \rightarrow W$  est linéaire, et  $\dim V, \dim W < \infty$ , alors*

- (a)  $\text{rang } T = \text{rang } T^*$ ,
- (b)  $T$  est surjectif  $\iff T^*$  est injectif, et
- (c)  $T$  est injectif  $\iff T^*$  est surjectif.

*Démonstration.* (a) Nous avons

$$\begin{aligned} \text{rang } T^* &= \dim W^* - \dim(\text{Ker } T^*) && \text{(par le théorème du rang)} \\ &= \dim W^* - \dim(\text{Im } T)^\circ && \text{(par (3.4))} \\ &= \dim W^* - (\dim W - \dim(\text{Im } T)) && \text{(par Théorème 3.7.12)} \\ &= \dim \text{Im } T && \text{(depuis } \dim W = \dim W^* \text{ par Théorème 3.7.2)} \\ &= \text{rang } T. \end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} T \text{ est surjectif} &\iff \text{rang } T = \dim W \\ &\iff \text{rang } T^* = \dim W^* && \text{(par partie (a) et Théorème 3.7.2)} \\ &\iff \dim \text{Ker } T^* = 0 && \text{(par le théorème du rang)} \\ &\iff T^* \text{ est injectif.} \end{aligned}$$

(c) Nous avons

$$\begin{aligned}
 T \text{ est injectif} &\iff \text{null } T = 0 \\
 &\iff \text{rang } T = \dim V && \text{(par le théorème du rang)} \\
 &\iff \text{rang } T^* = \dim V^* && \text{(par partie (a) et Théorème 3.7.2)} \\
 &\iff T^* \text{ est surjectif.} && \square
 \end{aligned}$$

## Exercices.

3.7.1. Montrer que les applications  $f_i$  définies par (3.3) sont linéaires.

3.7.2 ([Ber14, Ex. 3.6.7]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f$  une forme linéaire non nulle sur  $V$ . Prouver que  $\dim \text{Ker}(f) = n - 1$ . Inversement, montrez que chaque sous-espace linéaire de dimension  $(n - 1)$  de  $V$  est le noyau d'une forme linéaire.

3.7.3 ([Ber14, Ex. 3.6.9]). Soit  $V$  un espace vectoriel et supposons que  $f_1, \dots, f_n$  sont des formes linéaires sur  $V$  telles que

$$(\text{Ker } f_1) \cap \dots \cap (\text{Ker } f_n) = \{\mathbf{0}\}.$$

Prouver que  $V$  est de dimension finie et  $\dim V \leq n$ . *Indice* : Si  $F$  est le corps des scalaires, considérez une application appropriée  $V \rightarrow F^n$ .

3.7.4 ([Ber14, Ex. 3.6.10]). Soit  $V$  l'ensemble de tous les vecteurs  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $2x - 3y + z = 0$ . Prouver que  $V$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  et trouver sa dimension. *Indice* : Utilisez l'exercice 3.7.2.

3.7.5 ([Ber14, Ex. 3.9.3]). Si  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie et  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, prouver que  $T$  et  $T^*$  ont la même nullité si et seulement si  $\dim V = \dim W$ .

3.7.6 ([Ber14, Ex. 3.9.5]). Soit  $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles (Exemple 1.2.8). Pour chaque entier positif ou nul  $k$ , on définit une forme linéaire  $\varphi_k$  sur  $V$  donnée par  $\varphi_k(p) = p^{(k)}(0)$ , où  $p^{(k)}$  désigne la  $k$ -ième dérivée de  $p$ . Si  $D: V \rightarrow V$  est l'application de dérivation  $Dp = p'$ , montrez que  $D^* \varphi_k = \varphi_{k+1}$ . *Indice* :  $\varphi_k(p) = (D^k p)(0)$ .

3.7.7 ([Ber14, Ex. 3.9.7]). Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces vectoriels de dimension finie et que  $T: V \rightarrow W$  soit une application linéaire. Montrer que  $T$  est bijective si et seulement si  $T^*$  est bijectif. *Indice* : Utilisez le corollaire 3.7.13.

3.7.8 ([Ber14, Ex. 3.9.10]). Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que l'application

$$\Phi: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(W^*, V^*), \quad \Phi(T) = T^*$$

est linéaire et bijective.

3.7.9 ([Ber14, Ex. 3.9.13]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie,  $M$  un sous-espace de  $V$ , et  $M^\circ$  l'annulateur de  $M$  dans  $V^*$ . Démontrez ce qui suit :

- (a)  $M^\circ = \{\mathbf{0}\}$  si et seulement si  $M = V$  ;
- (b)  $M^\circ = V^*$  si et seulement si  $M = \{\mathbf{0}\}$ .



# Chapitre 4

## Matrices

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux matrices, qu’y ont déjà été étudié dans MAT 1741. Cependant, nous aborderons le sujet des matrices plus en détail. En particulier, nous définirons la “matrice d’une application linéaire”, qui généralise la “matrice standard” d’une application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vue dans MAT 1741. Nous rappellerons ensuite la procédure du pivot de Gauss (ou élimination gaussienne) et la notion de rang de une matrice. Le matériel de cette section correspond à peu près à [Tre, §2.2, §2.7, §2.8].

### 4.1 La matrice d’une application linéaire

Le choix de bases permet d’associer une matrice à n’importe quelle application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, comme nous allons l’expliquer maintenant.

**Definition 4.1.1** (La matrice d’une application linéaire). Supposons que  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $F$ ,  $n = \dim V$ ,  $m = \dim W$  et  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire. Soit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base ordonnée de  $V$  et soit  $D = \{w_1, \dots, w_m\}$  une base ordonnée de  $W$ . Pour chaque  $j = 1, \dots, n$ , on écrit  $Tv_j$  comme une combinaison linéaire de  $w_1, \dots, w_m$  :

$$Tv_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Alors la matrice  $m \times n$   $[a_{ij}]$  est appelée la *matrice de  $T$  relative aux bases  $v_1, \dots, v_n$  et  $w_1, \dots, w_m$*  et est noté  $[T]_B^D$ .

- Remark 4.1.2.* (a) Il est important que les bases soient *ordonnées*. Changer l’ordre des vecteurs dans les bases changera la matrice.
- (b) Nous utiliserons parfois la notation  $[T]$  au lieu de  $[T]_B^D$  lorsque nous aurons fixé les bases  $B$  et  $D$  et qu’il n’y a aucun risque de confusion.
- (c) Une application linéaire donnée peut avoir différentes matrices (si vous choisissez différentes bases).

Rappelons que si  $V$  est un espace de dimension  $n$ , et que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  est une base ordonnée de  $V$ , alors nous avons un isomorphisme

$$C_B: V \rightarrow F^n, \quad C_B \left( \sum_{i=1}^n c_i v_i \right) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n.$$

$C_B$  est ce qu'on appelle la *fonction coordonnée* qui associe à un vecteur  $v \in V$  ses coordonnées dans la base  $B$ . Si  $D$  est une base ordonnée de  $W$  et  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ , nous avons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ C_B \downarrow & & \uparrow C_D \\ F^n & \xrightarrow{C_D T C_B^{-1}} & F^m \\ C_B^{-1} \uparrow & & \downarrow C_D^{-1} \end{array}$$

Nous savons par MAT 1741 qu'une application linéaire  $F^n \rightarrow F^m$  correspond à une multiplication par une matrice. (Dans MAT 1741,  $F$  était  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , mais l'argument est le même en général.) Donc  $C_D T C_B^{-1}$  correspond à la multiplication par une matrice, et c'est la matrice  $[T]_B^D$ . Cela nous donne un isomorphisme

$$\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(F^n, F^m), \quad T \mapsto C_D T C_B^{-1},$$

et un isomorphisme

$$\mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(F), \quad T \mapsto [T]_B^D.$$

Nous identifions souvent une matrice  $m \times n$  avec l'application correspondante  $F^n \rightarrow F^m$  (donnée par multiplication par cette matrice) et nous écrivons donc  $[T]_B^D = C_D T C_B^{-1}$ .

Notez que

$$C_D(Tv_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

et donc

$$[T]_B^D = [C_D(Tv_1) \quad C_D(Tv_2) \quad \cdots \quad C_D(Tv_n)].$$

*Example 4.1.3.* Soit  $S: F^n \rightarrow F^m$  une application linéaire et choisissons les bases standards  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $D = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Alors  $C_B: F^n \rightarrow F^n$  et  $C_D: F^m \rightarrow F^m$  sont les applications identité. Ainsi

$$[T]_B^D = [S e_1 \quad S e_2 \quad \cdots \quad S e_n]$$

est simplement la matrice standard de la transformation linéaire (comme vous l'avez vu dans MAT 1741).

Rappelons (de MAT 1741) que, pour une matrice  $A$ ,  $\text{col } A$  désigne l'espace des colonnes de  $A$  (le sous-espace vectoriel engendré par colonnes de  $A$ ).

**Proposition 4.1.4.** Avec la même notation que ci-dessus, on a

- (a)  $[T]C_B(v) = C_D T(v)$  pour tous les  $v \in V$ ,
- (b)  $C_B(\text{Ker } T) = \text{Ker}[T]$  où  $\text{Ker } T = C_B^{-1}(\text{Ker}[T])$ , et
- (c)  $C_D(\text{Im } T) = \text{Im}[T] = \text{col}[T]$  où  $\text{Im } T = C_D^{-1}(\text{col}[T])$ .

*Démonstration.* Rappelons que nous avons  $[T] = C_D T C_B^{-1}$ . Composer à gauche avec  $C_B$  donne (a). Puisque  $C_B$  et  $C_D$  sont des isomorphismes, nous avons

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}[T] &\iff [T]v = \mathbf{0} \\ &\iff C_D T C_B^{-1}v = \mathbf{0} \\ &\iff T C_B^{-1}v = \mathbf{0} \\ &\iff C_B^{-1}v \in \text{Ker } T \\ &\iff v \in C_B(\text{Ker } T), \end{aligned}$$

ce qui prouve (b). Enfin, pour prouver (c), nous avons

$$\begin{aligned} v \in \text{Im}[T] &\iff [T]w = v \text{ pour certains } w \in F^n \\ &\iff C_D T C_B^{-1}w = v \text{ pour certains } w \in F^n \\ &\iff C_D T x = v \text{ pour certains } x \in V \\ &\iff C_D y = v \text{ pour certains } y \in \text{Im } T \\ &\iff v \in C_D(\text{Im } T). \quad \square \end{aligned}$$

*Exemple 4.1.5.* Soit  $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  l'application linéaire donnée par  $T(p) = p' - p''$ . Choisissez les bases ordonnées  $B = \{1, t, t^2, t^3\}$  et  $D = \{1, t, t^2\}$  de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  respectivement. Alors

$$\begin{aligned} [T] &= [C_D T(1) \quad C_D T(t) \quad C_D T(t^2) \quad C_D T(t^3)] \\ &= [C_D(0) \quad C_D(1) \quad C_D(2t - 2) \quad C_D(3t^2 - 6t)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Trouvons maintenant le noyau et l'image de  $T$ . En utilisant les techniques de MAT 1741, nous savons que

$$\text{Ker}[T] = \text{Span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \text{col}[T] = \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent

$$\text{Ker } T = \text{Span} \left\{ C_B^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = \text{Span}\{1\},$$

et

$$\text{Im } T = C_D^{-1}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Notez que si nous avons une application linéaire  $T: V \rightarrow V$  d'un espace vectoriel  $V$  dans lui-même, nous utilisons souvent les mêmes bases pour  $V$  comme domaine et comme codomaine. Mais ce n'est pas toujours le cas.

*Exemple 4.1.6.* Considérons les bases  $B = \{e_1, e_2\}$  et  $D = \{(1, 1), (1, -1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application identité. Alors

$$[I]_B^D = [C_D I(e_1) \quad C_D I(e_2)] = [C_D(e_1) \quad C_D(e_2)].$$

Pour terminer le calcul, nous devons trouver  $C_D(e_1)$  et  $C_D(e_2)$ . En d'autres termes, nous devons écrire  $e_1$  et  $e_2$  dans la base  $D$ . Nous avons

$$e_1 = (1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1).$$

Ainsi

$$[I]_B^D = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

## Exercices.

4.1.1. Choisissez les mêmes bases pour  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  que dans l'exemple 4.1.5 et soit  $S: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  l'application linéaire tel que  $S(p)$  est la primitive de  $p$  avec un terme constant zéro. Donnez la matrice  $[S]$  pour  $S$  et vérifiez que  $[S]C_D(p) = C_B S(p)$  pour tout  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

4.1.2 ([Ber14, Ex. 4.2.1]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 3, soit  $x_1, x_2, x_3$  une base de  $V$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(V)$  l'application linéaire donnée par

$$Tx_1 = x_1, \quad Tx_2 = x_1 + x_2, \quad Tx_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Trouver les matrices de  $T$  et  $T^{-1}$  relatives à la base  $x_1, x_2, x_3$ .

4.1.3. Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$T(x, y) = (3x + 2y, x - y, 4x + 5y).$$

Trouver la matrice de  $T$  relative aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

4.1.4 ([Ber14, Ex. 4.2.4]). Soit  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des polynômes réels de degré  $\leq 3$  (voir Exemple 1.2.8), et soit  $D: V \rightarrow V$  l'application linéaire défini par  $Dp = p'$  (la dérivée de  $p$ ). Trouver la matrice de  $D$  relative à la base  $1, t, t^2, t^3$  de  $V$ .

4.1.5 ([Ber14, Ex. 4.2.5]). On fixe  $y \in \mathbb{R}^3$  et on définit

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Tx = x \wedge y$$

Où  $\wedge$  est le produit vectoriel. Trouvez la matrice de  $T$  par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

4.1.6 ([Ber14, Ex. 4.2.7]). Si  $A = (a_{i,j})$  est une matrice  $n \times n$ , la *trace* de  $A$  est

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Démontrer que  $\operatorname{tr}: M_n(F) \rightarrow F$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $M_n(F)$  de toutes les matrices  $n \times n$  sur le corps  $F$ .

4.1.7 ([Ber14, Ex. 4.2.8]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $F$  de base  $x_1, \dots, x_n$ , et soit  $f: V \rightarrow F$  une forme linéaire sur  $V$ . Décrire la matrice de  $f$  relative à la base  $x_1, \dots, x_n$  de  $V$  et à la base 1 de  $F$ .

4.1.8 ([Ber14, Ex. 4.2.9]). On rappelle (de MAT 1741) que si  $A = (a_{i,j})$  est une matrice  $m \times n$  sur  $F$ , la *transposée* de  $A$ , notée  $A^t$ , est la matrice  $n \times m$   $(b_{i,j})$ , où  $b_{i,j} = a_{j,i}$ . Montrer que  $A \mapsto A^t$  est un isomorphisme d'espace vectoriel  $M_{m,n}(F) \rightarrow M_{n,m}(F)$ .

4.1.9 ([Ber14, Ex. 4.2.10]). Soit  $V = W = \mathbb{R}^2$ . Choisissez la base  $B = \{x_1, x_2\}$  de  $V$ , où  $x_1 = (2, 3)$ ,  $x_2 = (4, -5)$  et choisissez la base  $D = \{y_1, y_2\}$  de  $W$ , où  $y_1 = (1, 1)$ ,  $y_2 = (-3, 4)$ . Trouver la matrice de l'application linéaire identité  $I: V \rightarrow W$  par rapport à ces bases.

4.1.10. Supposons que  $U, V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels (sur le même corps) avec des bases ordonnées  $B, D$  et  $E$  respectivement. Supposons que nous ayons des applications linéaires

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W.$$

Montrez que  $[ST]_B^E = [S]_D^E \cdot [T]_B^D$  (où le produit du membre de droite est la multiplication matricielle). Notez que nous devons utiliser la même base de l'espace intermédiaire  $V$  dans les deux matrices.

4.1.11. Supposons que  $V$  est un espace vectoriel avec deux bases ordonnées  $B$  et  $D$ . Montrer qu'une application linéaire  $T: V \rightarrow V$  est inversible si et seulement si la matrice  $[T]_B^D$  est inversible. De plus, si  $T$  est inversible, montrer que  $[T^{-1}]_D^B = ([T]_B^D)^{-1}$ . *Indice* : Utilisez Exercice 4.1.10.

## 4.2 Changement de bases et matrices similaires

Dans cette section, nous nous concentrons sur le cas des applications linéaires  $T: V \rightarrow V$  d'un espace vectoriel dans lui-même et supposons que  $V$  est de dimension finie. Quelle est la relation entre les matrices de  $T$  dans différentes bases? Rappelons que

$$[T]_B^B = C_B T C_B^{-1}, \quad \text{et donc} \quad C_B^{-1} [T]_B^B C_B = T.$$

Supposons maintenant que  $D$  soit une autre base ordonnée de  $V$ . Alors

$$C_B^{-1} [T]_B^B C_B = T = C_D^{-1} [T]_D^D C_D,$$

et donc

$$[T]_D^D = C_D C_B^{-1} [T]_B^B C_B C_D^{-1}.$$

Soit  $P = C_B C_D^{-1}$ . Puis  $P^{-1} = C_D C_B^{-1}$  et on en déduit que

$$[T]_D^D = P^{-1}[T]_B^B P.$$

Maintenant, si  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  et  $D = \{w_1, \dots, w_n\}$ , alors

$$C_D(w_j) = e_j, \quad \text{et donc} \quad w_j = C_D^{-1}(e_j).$$

Par conséquent

$$P e_j = C_B C_D^{-1}(e_j) = C_B(w_j).$$

Ainsi  $P e_j$  n'est que la  $j$ -ième colonne de  $P$ , nous voyons que

La  $j$ -ième colonne de  $P$  donne les coordonnées de  $w_j$  dans la base  $B$ .

Ainsi, si  $P = [P_{ij}]$ , alors  $w_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} v_i$ . La matrice  $P$  est appelée la *matrice de changement de base* de  $B$  vers  $D$ .

*Exemple 4.2.1.* Supposons que  $V = \mathbb{R}^2$  et  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est l'application linéaire donnée par multiplication par la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soit  $B = \{e_1, e_2\}$  la base standard et  $D = \{w_1, w_2\}$  où  $w_1 = (1, 1)$  et  $w_2 = (1, -1)$ . Alors

$$[T]_B^B = [C_B T(e_1) \quad C_B T(e_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est la matrice standard de  $T$  puisque  $B$  est la base standard de  $\mathbb{R}^2$ . Cependant,

$$[T]_D^D = \left[ C_D \left( J \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad C_D \left( J \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right] = \left[ C_D \left( \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \quad C_D \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

une matrice diagonale!

Notez que  $P e_j = C_B C_D^{-1}(e_j)$ , donc

$$P e_1 = C_B C_D^{-1}(e_1) = C_B(w_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P e_2 = C_B C_D^{-1}(e_2) = C_B(w_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

et

$$P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$P^{-1}[T]_B^B P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [T]_D^D.$$

*Remark 4.2.2.* Dans ce cas particulier,  $w_1$  et  $w_2$  sont des vecteurs propres de la matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , avec des valeurs propres 2 et 1, respectivement.

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est diagonale et les colonnes de  $P$  sont  $w_1$  et  $w_2$  (qui sont  $C_B(w_1)$  et  $C_B(w_2)$  puisque  $B$  est la base standard!), et les entrées diagonales de  $[T]_D^D$  sont les valeurs propres. L'idée de changer de base est (généralement) de *simplifier*  $[T]_B^B$  autant que possible.

**Definition 4.2.3** (Matrices similaires). Deux matrices  $n \times n$   $X$  et  $Y$  sont *similaires* s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}XP = Y$ .

*Exemples 4.2.4.*

La matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  est similaire à  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , avec  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

La matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  est similaire à  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , avec  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

La matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  est similaire à  $P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P$  et  $Q \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} Q^{-1}$  pour toute  $P$  (ou  $Q$ ).

*Remark 4.2.5.* (a) La similarité est une relation d'équivalence sur les matrices (Exercice 4.2.5).

(b) Sur un corps infini, une matrice donnée est en général semblable à une infinité de matrices. Cependant, il existe des exceptions. Par exemple, toute matrice similaire à la matrice identité  $I_n$  est de la forme  $P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$ . Donc  $I_n$  n'est similaire qu'à elle-même. Il en va de même pour  $cI_n$  pour tout  $c$  scalaire.

Le théorème suivant explique pourquoi nous avons utilisé le mot 'transposée' dans la Définition 3.7.7.

**Theorem 4.2.6.** *Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie et que  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  est l'application transposée. Si  $B$  et  $D$  sont des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement et  $B^*$  et  $D^*$  sont les bases duales correspondantes, alors*

$$([T]_B^D)^t = [T^*]_{D^*}^{B^*},$$

où  $A^t$  désigne la transposée de la matrice  $A$  (voir Exercice 4.1.8).

*Démonstration.* Soit

$$\begin{aligned} B &= \{v_1, \dots, v_n\}, & D &= \{w_1, \dots, w_m\}, & X &= [T]_B^D = [X_{ij}], \\ B^* &= \{f_1, \dots, f_n\}, & D^* &= \{g_1, \dots, g_m\}, & Y &= [T^*]_{D^*}^{B^*} = [Y_{ij}]. \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , on a

$$(T^*g_j)(v_i) = (g_jT)(v_i) = g_j(Tv_i) = g_j\left(\sum_{k=1}^m X_{ki}w_k\right) = X_{ji}.$$

D'autre part,

$$(T^*g_j)(v_i) = \left(\sum_{l=1}^n Y_{lj}f_l\right)(v_i) = Y_{ij}.$$

Ainsi  $X_{ji} = Y_{ij}$  pour tous  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ . Donc  $X^t = Y$ .  $\square$

Faisons un dernier exemple sur les matrices associées aux applications linéaires. Supposons que l'on connaisse la matrice d'une application linéaire dans certaines bases. Comment calculez-vous l'action de l'application linéaire ?

*Example 4.2.7.* Choisissez la base ordonnée  $B = \{1, t, t^2\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  et  $D = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$  de  $M_2(\mathbb{R})$  (ici  $e_{ij}$  est la matrice avec un un dans la position  $(i, j)$  et des zéros partout ailleurs). Supposons qu'une application linéaire  $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  ait une matrice

$$[T]_B^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Qu'est-ce que  $T(t^2 - 1)$  ?

Rappelez-vous que  $[T]_B^D = C_D T C_B^{-1}$ . Ainsi  $T = C_D^{-1} [T]_B^D C_B$ . Alors

$$\begin{aligned} T(t^2 - 1) &= C_D^{-1} [T]_B^D C_B (t^2 - 1) \\ &= C_D^{-1} [T]_B^D \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= C_D^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= C_D^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= -e_{11} + e_{12} - e_{21} - 2e_{22} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## Exercices.

4.2.1 ([Tre, Ex. 2.8.2]). Considérez les vecteurs

$$(1, 2, 1, 1), \quad (0, 1, 3, 1), \quad (0, 3, 2, 0), \quad (0, 1, 0, 0).$$

- (a) Prouver que ces vecteurs forment une base dans  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Trouver la matrice de changement de base de cette base vers la base standard de  $\mathbb{R}^4$ .

4.2.2 ([Tre, Ex. 2.8.3]). Trouvez la matrice de changement de base de la base  $1, 1+t$  de  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  vers la base  $1-t, 2t$  (voir Exemple 1.2.8).

4.2.3 ([Tre, Ex. 2.8.4]). Considérez l'application linéaire

$$T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad T(x, y) = (3x + y, x - 2y).$$

Retrouver la matrice de  $T$  dans la base standard et aussi dans la base  $(1, 1), (1, 2)$ .

4.2.4. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \{e_1, e_2\}, \quad D = \{(3, 1), (-2, 1)\}, \quad T(v) = Av.$$

Trouvez  $[T]_B^B$  et  $[T]_D^D$ .

4.2.5. Fixer un entier strictement positif  $n$ . Montrer que la similarité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices  $n \times n$ . (Voir Définition B.1.1 pour la définition de la relation d'équivalence.)

## 4.3 Élimination gaussienne

Dans cette section et la suivante, nous passons en revue certains éléments du cours MAT 1741. Rappelez-vous que vous avez appris à réduire une matrice en ligne. Cette procédure est appelée *pivot de Gauss* ou *élimination Gaussienne*. Vous avez utilisé les opérations suivantes :

**Définition 4.3.1** (Opérations élémentaires sur les ligne/colonnes). Les opérations suivants sont appelés *opérations élémentaire sur les lignes* d'une matrice  $A$  avec des coefficient dans  $F$ .

- *Type I* : Échangez deux lignes de  $A$ .
- *Type II* : Multipliez n'importe quelle ligne de  $A$  par un élément non nul de  $F$ .
- *Type III* : Ajouter un multiple d'une ligne de  $A$  à une autre ligne de  $A$ .

Remplacer le mot "ligne" par "colonne" partout au-dessus donne les *opérations élémentaire sur les colones*.

**Definition 4.3.2** (Matrices élémentaires). Une *matrice élémentaire*  $n \times n$  est une matrice obtenue en effectuant une opération élémentaire ligne/colonne sur la matrice identité  $I_n$ . En particulier, nous définissons les matrices élémentaires suivantes :

- Pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , soit  $P_{i,j}$  la matrice élémentaire obtenue à partir de  $I_n$  en interchangeant les  $i$ -ième et  $j$ -ième lignes (de manière équivalente, colonnes).
- Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $a \in F^\times$ , soit  $M_i(a)$  la matrice élémentaire obtenue à partir de  $I_n$  en multipliant la  $i$ -ième ligne (de manière équivalente, colonne) par  $a$ .
- Pour  $i \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  et  $a \in F$ , soit  $E_{i,j}(a)$  la matrice élémentaire obtenue à partir de  $I_n$  en ajoutant  $a$  fois la ligne  $j$  à la ligne  $i$  (de manière équivalente, en ajoutant  $a$  fois la colonne  $i$  à la colonne  $j$ ).

Le *type* de la matrice élémentaire est le type de l'opération ligne/colonne correspondante effectuée sur  $I_n$ .

**Lemma 4.3.3.** (a) *Toute matrice élémentaire est inversible et l'inverse est une matrice élémentaire de même type.*

(b) *Effectuer une opération élémentaire ligne sur une matrice  $A$  revient à multiplier  $A$  à gauche par la matrice élémentaire correspondante.*

(c) *Effectuer une opération colonne élémentaire sur une matrice  $A$  revient à multiplier  $A$  à droite par la matrice élémentaire correspondante.*

*Démonstration.* Vous avez vu cela dans MAT 1741, et nous allons donc omettre la preuve ici. □

**Definition 4.3.4** (Forme échelonnée). Une matrice  $R \in M_{m,n}(F)$  est dite *échelonnée* (en ligne) si :

- (a) toutes les lignes non nulles sont au-dessus de toutes les lignes nulles, et
- (b) le coefficient principal (la première entrée non nulle à partir de la gauche) d'une ligne non nulle est strictement à droite du coefficient principal de la ligne au-dessus.

**Lemma 4.3.5.** *Chaque matrice  $A \in M_{m,n}(F)$  peut être transformée en une matrice échelonnée  $R$  en effectuant des opérations élémentaire sur les lignes de type I et III. De manière équivalente, il existe un nombre fini de matrices élémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_k$  telles que  $R = E_1 E_2 \cdots E_k A$ .*

*Démonstration.* Vous avez vu cela dans MAT 1741, et nous allons donc omettre la preuve ici. □

**Theorem 4.3.6.** *En effectuant à la fois des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, chaque matrice  $A \in M_{m,n}(F)$  peut être transformée en une matrice de bloc de la forme*

$$D = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m) \times r} & 0_{(m) \times (n-r)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

pour certains  $r$  avec  $0 \leq r \leq \min(m, n)$ .

*Démonstration.* A partir d'une matrice  $A$ , nous effectuons les étapes suivantes :

- Utilisez les opérations sur les lignes pour réduire la matrice à la forme d'échelon comme dans le lemme 4.3.5.
- Utilisez les opérations sur les lignes de type II pour transformer l'entrée principale de chaque lignes en 1.
- Utilisez les opérations sur les colonnes de type III pour éliminer toutes les entrées à droite de chaque entrée principale.
- Utilisez des opérations sur les colonnes de type I pour déplacer la colonne avec un 1 dans la ligne du haut vers la première colonne, la colonne avec un 1 dans la deuxième ligne vers la deuxième colonne, etc.

□

---

## Exercises.

4.3.1. À l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes, réduisez les matrices suivantes à la forme indiquée dans le théorème 4.3.6 :

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## 4.4 Le rang d'une matrice

**Definition 4.4.1** (Rang d'une matrice). Le *rang* de  $A \in M_{m,n}(F)$ , noté  $\text{rang}(A)$  est le rang de l'application linéaire

$$T: F^n \rightarrow F^m$$

donnée par multiplication matricielle à gauche par  $A$  (équivalent, tel que  $[T] = A$  par rapport aux bases standards de  $F^n$  et  $F^m$ ).

**Lemma 4.4.2.** Une matrice  $A \in M_n(F)$  est inversible si et seulement si  $\text{rang}(A) = n$ .

*Démonstration.* Soit  $T: F^n \rightarrow F^n$  l'application linéaire donnée par multiplication matricielle par  $A$ . Ainsi  $[T] = A$ , par rapport à la base standard de  $F^n$ . Alors  $T$  est inversible si et seulement si  $A$  est inversible. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) = n &\iff \text{rang}(T) = n && \text{(par Définition 4.4.1)} \\ &\iff \dim T(V) = n && \text{(par Définition 3.5.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff T \text{ est inversible} && \text{(par Corollaire 3.5.3)} \\ &\iff A \text{ est inversible.} && \square \end{aligned}$$

**Lemma 4.4.3.** *Une matrice  $A \in M_n(F)$  est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.*

*Démonstration.* Puisque les matrices élémentaires sont inversibles, il est clair que si  $A$  peut être écrit comme un produit de matrices élémentaires, alors  $A$  est inversible.

Supposons maintenant que  $A$  est inversible. Alors, par le lemme 4.4.2,  $\text{rang}(A) = n$ . Ainsi, la matrice  $D$  du Théorème 4.3.6 est la matrice identité  $I_n$ . (Vous avez appris dans MAT 1741 que vous pouvez utiliser la réduction de ligne pour convertir une matrice inversible en matrice d'identité.) Ainsi, il existe des matrices élémentaires  $E_1, \dots, E_p$  et  $F_1, \dots, F_q$  telles que

$$E_1 \cdots E_p A F_1 \cdots F_q = I_n.$$

Ainsi

$$A = E_p^{-1} \cdots E_1^{-1} F_q^{-1} \cdots F_1^{-1}.$$

Puisque l'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire, il s'ensuit que  $A$  peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.  $\square$

**Lemma 4.4.4.** *Si  $A \in M_{m,n}(F)$  et  $B \in M_{n,k}(F)$ , alors*

$$\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A) \quad \text{et} \quad \text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B).$$

*Démonstration.* Soit  $T_A: F^n \rightarrow F^m$  l'application linéaire donnée par multiplication matricielle (à gauche) par  $A$ , et soit  $T_B: F^k \rightarrow F^n$  l'application linéaire donnée par multiplication matricielle (à gauche) par  $B$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{rang}(AB) &= \text{rang}(T_A \circ T_B) && \text{(par définition)} \\ &\leq \dim(\text{Im } T_A) && \text{(par Exercice 3.5.5(b))} \\ &= \text{rang}(A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{rang}(AB) &= \text{rang}(T_A \circ T_B) && \text{(par définition)} \\ &\leq \dim(\text{Im } T_B) && \text{(par Exercice 3.5.5(b))} \\ &= \text{rang}(B). && \square \end{aligned}$$

**Corollary 4.4.5.** *Soit  $A \in M_{m,n}(F)$ . Si  $P$  et  $Q$  sont respectivement des matrices inversibles  $m \times m$  et  $n \times n$ , alors*

$$\text{rang}(PA) = \text{rang}(A) = \text{rang}(AQ).$$

*Démonstration.* Par lemme 4.4.4, on a

$$\text{rang}(PA) \leq \text{rang}(A)$$

et

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(P^{-1}PA) \leq \text{rang}(PA).$$

D'où  $\text{rang}(PA) = \text{rang}(A)$ . La preuve de  $\text{rang}(AQ) = \text{rang}(A)$  est similaire.  $\square$

**Lemma 4.4.6.** Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $B$  une base ordonnée de  $V$  et soit  $D$  une base ordonnée de  $W$ . Alors

$$\text{rang}(T) = \text{rang}([T]_B^D).$$

*Démonstration.* Soit  $n = \dim V$  et  $m = \dim W$ . Soit  $S_V: F^n \rightarrow V$  l'isomorphisme qui envoie la base standard de  $F^n$  à la base  $B$ , et soit  $S_W: W \rightarrow F^m$  l'isomorphisme qui envoie la base  $D$  à la base standard de  $F$ . Soit

$$U = S_W \circ T \circ S_V: F^n \rightarrow F^m$$

la composition. Alors  $[T]_B^D = [U]$  (où  $[U]$  désigne la matrice de  $U$  par rapport aux bases standards). Ainsi

$$\begin{aligned} \text{rang}(T) &= \text{rang}(S_W^{-1} \circ U \circ S_V^{-1}) && \text{(depuis } U = S_W \circ T \circ S_V) \\ &= \text{rang}(U) && \text{(par le corollaire 4.4.5)} \\ &= \text{rang}([U]) && \text{(par la définition 4.4.1)} \\ &= \text{rang}([T]_B^D). && \square \end{aligned}$$

Le lemme 4.4.6 nous dit que pour calculer le rang de toute application linéaire, vous pouvez calculer le rang de sa matrice dans *n'importe quelle* base. Nous réduisons donc le problème aux calculs matriciels que vous avez appris dans MAT 1741.

**Lemma 4.4.7.** Le rang d'une matrice  $A$  est égal à la dimension de l'espace colonne de  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in M_n(F)$  et soit  $T: F^n \rightarrow F^n$  la matrice donnée par multiplication matricielle (à gauche). Alors  $T(e_j)$  est la  $j$ -ème colonne de  $A$ . Ainsi nous avons

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Span}\{T(e_1), \dots, T(e_m)\}) = \dim(\text{col}(A)). \quad \square$$

**Lemma 4.4.8.** Supposons que  $A \in M_{m,n}(F)$  ait une form échelonnée  $R$  et une matrice de bloc  $D$  comme dans le théorème 4.3.6. Alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(R) = \text{rang}(D) = r.$$

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est laissée sous forme d'exercice 4.4.1. □

Rappelons que le l'espace des lignes d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

**Lemma 4.4.9.** Soit  $A \in M_{m,n}(F)$ .

- (a) Nous avons  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$ .
- (b) Le rang de  $A$  est égal à la dimension de l'espace ligne de  $A$ .
- (c) L'espace ligne et l'espace colonne de  $A$  ont la même dimension.

*Démonstration.* (a) Soit  $D$  la matrice du Théorème 4.3.6. On a donc des matrices élémentaires  $E_1, \dots, E_p$  et  $F_1, \dots, F_q$  telles que

$$E_1 \cdots E_p A F_1 \cdots F_q = D.$$

Notez que  $\text{rang}(D^t) = \text{rang}(D)$ , puisque la taille du bloc de matrice d'identité dans  $D$  est la même que la taille du bloc de matrice d'identité dans  $D^t$ . Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) &= \text{rang}(D) && \text{(par lemme 4.4.8)} \\ &= \text{rang}(D^t) \\ &= \text{rang}(F_q^t \cdots F_1^t A^t E_p^t \cdots E_1^t) \\ &= \text{rang}(A^t). && \text{(par Corollaire 4.4.5)} \end{aligned}$$

(b) L'espace des lignes de  $A$  est égal à l'espace des colonnes de  $A^t$ . Ainsi, le résultat découle de la partie (a) et du lemme 4.4.7.

(c) Cela découle de la partie (b) et du lemme 4.4.7.

□

## Exercises.

4.4.1. Démontrer le lemme 4.4.8.

4.4.2. Démontrer que des matrices similaires ont le même rang.

4.4.3. Supposons que  $A$  et  $B$  soient des matrices  $n \times n$ . Prouver que, si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  sont toutes les deux inversibles. N'utilisez pas de déterminants, puisque nous ne les avons pas encore vus. *Indice* : Utilisez le lemme 4.4.4.

4.4.4. Supposons que  $A$  est une matrice  $n \times m$  avec des entrées dans  $F$ . Rappel (du MAT 1741), que le *noyau* de  $A$  est

$$\text{Ker } A = \{x \in F^m \mid Ax = \mathbf{0}\}.$$

Prouver que  $\text{rang}(A) + \dim(\text{Ker } A) = n$ .

4.4.5. Est-il possible qu'une matrice  $A = M_3(\mathbb{R})$  ait un espace de colonne engendré par  $(1, 1, 1)$  et un noyau engendré par  $(3, -1, 2)$  ?

# Chapitre 5

## Déterminants et applications multilinéaires

Vous avez vu le déterminant des matrices dans MAT 1741 et appris à les calculer. Dans cette section, nous revenons sur cette notion plus en profondeur. En particulier, nous expliquons *Pourquoi* le déterminant est défini tel qu'il est (ou, de manière équivalente, peut-être calculé de la manière que vous avez apprise) en prouvant que le déterminant est la *seule* fonction sur des matrices satisfaisant trois propriétés très naturelles. Le matériel de cette section correspond à peu près à [Tre, Ch. 3].

Nous supposons dans ce chapitre que  $2 \neq 0$  dans le corps  $F$ . En particulier, nous supposons  $F \neq \mathbb{F}_2$ . Nous faisons cela pour pouvoir utiliser l'argument selon lequel, pour  $a \in F$ , l'équation  $a = -a$  implique que  $a = 0$ . En effet, cela se démontre par

$$a = -a \implies 2a = 0 \implies \frac{1}{2} \cdot 2a = \frac{1}{2} \cdot 0 \implies a = 0.$$

Mais  $\frac{1}{2}$  n'existe que si  $2 \neq 0$ . Il existe des moyens d'éviter l'hypothèse  $2 \neq 0$  en modifiant légèrement les définitions de ce chapitre. Mais, pour simplifier, nous faisons cette hypothèse. Bien sûr, il n'y a aucun problème si  $F$  est  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 5.1 Applications multilinéaires

Supposons que  $V_1, \dots, V_n$  et  $W$  soient des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . Une *application multilinéaire* ou *application  $n$ -linéaire*

$$f: V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W$$

est une application qui est linéaire séparément dans chaque variable. En d'autres termes, pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , si toutes les variables autres que  $v_i$  sont maintenues constantes, alors  $f(v_1, \dots, v_n)$  est une fonction linéaire de  $v_i$ . Si  $n = 2$ , alors nous utilisons le terme *bilinéaire* au lieu de multilinéaire.

*Exemples 5.1.1.* (a) Si  $n = 1$ , alors  $f: V_1 \rightarrow W$  est linéaire si et seulement si elle est multilinéaire.

(b) Supposons que  $U, V, W$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $F$ . L'application

$$f: \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathcal{L}(U, W), \quad f(S, T) = ST,$$

est bilinéaire. Pour le voir, on vérifie que, pour

$$c, d \in F, \quad S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W), \quad \text{et} \quad T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V),$$

Nous avons

$$\begin{aligned} f(cS_1 + dS_2, T) &= (cS_1 + dS_2)T = cS_1T + dS_2T = cf(S_1, T) + df(S_2, T) \quad \text{et} \\ f(S, cT_1 + dT_2) &= S(cT_1 + dT_2) = cST_1 + dST_2 = cf(S, T_1) + df(S, T_2). \end{aligned}$$

(c) L'application

$$f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ factors}} \rightarrow V, \quad f(v_1, \dots, v_n) = v_1 + \cdots + v_n,$$

est linéaire, mais pas multilinéaire sauf si  $n = 1$  ou si  $V$  est l'espace vectoriel nul.

Pour voir que  $f$  est linéaire, nous vérifions que, pour tous les scalaires  $c, d$  et les vecteurs

$$v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in V,$$

Nous avons

$$\begin{aligned} f(c(v_1, \dots, v_n) + d(w_1, \dots, w_n)) &= f(cv_1 + dw_1, \dots, cv_n + dw_n) \\ &= cv_1 + dw_1 + \cdots + cv_n + dw_n \\ &= c(v_1 + \cdots + v_n) + d(w_1 + \cdots + w_n) \\ &= cf(v_1, \dots, v_n) + df(w_1, \dots, w_n). \end{aligned}$$

Pour voir que  $f$  n'est pas multilinéaire en général, supposons que  $n \geq 2$  et  $V$  ne sont pas l'espace vectoriel nul. Soit  $v$  un vecteur non nul dans  $V$ . Alors

$$f(v, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = v + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = v \neq \mathbf{0}.$$

Mais si  $f$  était multilinéaire, nous aurions

$$f(v, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = f(v, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, 0 \cdot \mathbf{0}) = 0f(v, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

C'est une contradiction.

(d) L'application zéro  $V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W$  est multilinéaire.

Une application multilinéaire

$$f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ factors}} \rightarrow F$$

s'appelle une *forme multilinéaire* ou *Forme n-linéaire*. Si  $n = 2$ , cela s'appelle une *forme bilinéaire*.



*Exemple 5.1.2.* Pour toute forme bilinéaire  $f: V \times V \rightarrow F$ , on a

$$\begin{aligned} f(c_1v_1 + c_2v_2, u) &= c_1f(v_1, u) + c_2f(v_2, u) \quad \text{et} \\ f(u, c_1v_1 + c_2v_2) &= c_1f(u, v_1) + c_2f(u, v_2) \end{aligned}$$

pour tous les  $c_1, c_2 \in F$  et  $u, v_1, v_2 \in V$ .

Chaque ligne d'une matrice  $A \in M_n(F)$  peut-être vue comme un élément de l'espace vectoriel  $F^n$ . Par conséquent, en tant qu'espace vectoriel, nous pouvons identifier  $M_n(F)$  avec

$$\underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n \text{ factors}}$$

où le premier facteur de  $F^n$  correspond à la première ligne de la matrice, etc. Alors une application  $f: M_n(F) \rightarrow F$  correspond à une application

$$f: \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n \text{ factors}} \rightarrow F,$$

et on peut demander si cette application est  $n$ -linéaire ou non.

*Exemples 5.1.3.* (a) Supposons que, pour chaque  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i: V_i \rightarrow F$  soit une forme linéaire. Alors

$$f: V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow F, \quad f(v_1, \dots, v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n),$$

est une forme  $n$ -linéaire. Voir Exercice 5.1.2.

(b) La fonction

$$f: M_n(F) \rightarrow F, \quad f(A) = a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n}, \quad A = (a_{i,j}),$$

est une forme  $n$ -linéaire. Cependant, si  $n \geq 2$ , ce n'est pas une forme linéaire. Voir Exercice 5.1.2.

(c) La fonction

$$\text{tr}: M_n(F) \rightarrow F, \quad \text{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}, \quad A = (a_{i,j}),$$

n'est pas une forme  $n$ -linéaire. Cependant, il s'agit d'une forme linéaire. Le scalaire  $\text{tr}(A)$  est appelée la *trace* de  $A$ . Voir Exercice 5.1.2.

Comme l'illustrent les exemples ci-dessus, une application peut-être linéaire mais pas multilinéaire et vice versa. En fait, lorsque  $n \geq 2$ , une application n'est à la fois linéaire et multilinéaire que lorsqu'il s'agit de l'application zéro. Voir Exercice 5.1.5.

## Exercices.

5.1.1. Prouver que l'application produit vectoriel

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = u \wedge v$$

(parfois notée  $u \times v$ ) est bilinéaire.

5.1.2. Démontrez les affirmations faites dans Exemples 5.1.3.

5.1.3. Supposer que

$$f: V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W$$

est une application multilinéaire. Prouver que  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$  chaque fois que  $v_i = 0$  pour certains  $1 \leq i \leq n$ .

5.1.4. Soit  $V$  un espace vectoriel dual  $V^*$ . Montrer que l'application

$$f: V \times V^* \rightarrow F, \quad f(v, \varphi) = \varphi(v),$$

est bilinéaire.

5.1.5. Supposons que  $V_1, V_2, W$  sont des espaces vectoriels sur  $F$ . Montrer que

$$f: V_1 \times V_2 \rightarrow W$$

est l'application zéro si et seulement si  $f$  est à la fois linéaire et bilinéaire.

## 5.2 Le déterminant

Étant donné  $A \in M_n(F)$  pour  $n \geq 2$ , on note  $A_{i,j}$  la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue à partir de  $A$  en supprimant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne. Comme d'habitude nous notons  $a_{i,j}$  l'entrée  $(i, j)$  de la matrice  $A$ .

**Definition 5.2.1** (Déterminant). On définit une fonction

$$\det: M_n(F) \rightarrow F$$

récurivement (par rapport à  $n$ ) comme suit. Pour  $n = 1$  nous définissons

$$\det(A) := a_{1,1}.$$

Pour  $n \geq 2$ , nous définissons

$$\det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(A_{i,1}) \cdot a_{i,1}. \quad (5.1)$$

La fonction  $\det$  est appelée la fonction *fonction déterminant*. La valeur  $\det(A)$  est appelée le *déterminant* de  $A$ , et est également noté  $\det A$  ou  $|A|$ . Le scalaire  $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$  est appelé le *cofacteur* de l'entrée de  $A$  en position  $(i, j)$ . La formule (5.1) s'appelle Le *développement en cofacteur le long de la première colonne* de  $A$ .

*Exemple 5.2.2.* Pour les matrices  $2 \times 2$ , nous avons

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Rappelons que  $I_n$  est la matrice identité .

**Lemma 5.2.3.** *Nous avons  $\det(I_n) = 1$ .*

*Démonstration.* Nous prouvons le résultat par récurrence sur  $n$ . Comme

$$\det(I_1) = \det[1] = 1,$$

le résultat est valable pour  $n = 1$ .

Supposons maintenant que  $\det(I_n) = 1$  pour un certain  $n \geq 1$ . En notant que  $(I_{n+1})_{1,1} = I_n$ , nous utilisons (5.1) pour calculer

$$\det(I_{n+1}) = (-1)^2 \det(I_n) \cdot 1 + (-1)^3 \det(I_{n+1})_{2,1} \cdot 0 + \cdots + (-1)^{n+2} \det(I_{n+1})_{n+1,1} \cdot 0 = 1.$$

□

On rappelle de la section 5.1 que  $\det: M_n(F) \rightarrow F$  peut être considéré comme une fonction

$$\det: \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n \text{ factors}} \rightarrow F.$$

**Theorem 5.2.4.** *La fonction déterminante  $\det: M_n(F) \rightarrow F$  est  $n$ -linéaire.*

*Démonstration.* Nous prouvons le résultat par récurrence sur  $n$ . Le cas de base  $n = 1$  est évident.

Supposons maintenant que  $n > 1$  et que  $\det: M_{n-1}(F) \rightarrow F$  est  $(n-1)$ -linéaires. Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ . Supposons que pour la  $r$ -ième ligne de  $A$  nous ayons

$$(a_{r,1}, \dots, a_{r,n}) = \ell(b_1, \dots, b_n) + k(c_1, \dots, c_n), \quad \ell, k \in F.$$

En d'autres termes, nous avons

$$a_{r,i} = \ell b_i + k c_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soit  $B$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $r$ -ième ligne par  $(b_1, \dots, b_n)$  et soit  $C$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $r$ -ième ligne par  $(c_1, \dots, c_n)$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{(5.1)}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(A_{i,1}) \cdot a_{i,1} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq r}} (-1)^{i+1} \det(A_{i,1}) \cdot a_{i,1} + (-1)^{r+1} \det(A_{r,1}) \cdot a_{r,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq r}} (-1)^{i+1} (\ell \det(B_{i,1}) + k \det(C_{i,1})) \cdot a_{i,1} + (-1)^{r+1} \det(A_{r,1}) \cdot (\ell b_{r,1} + k c_{r,1}) \\
&= \ell \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(B_{i,1}) \cdot b_{i,1} + k \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(C_{i,1}) \cdot c_{i,1} \\
&\stackrel{(5.1)}{=} \ell \det(B) + k \det(C),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence dans la troisième égalité. Ceci termine la preuve de l'étape de récurrence.  $\square$

*Exemple 5.2.5.* Le déterminant d'une matrice  $2 \times 2$  est une forme bilinéaire

$$\det: F^2 \times F^2 \rightarrow F$$

donnée par

$$\det((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Le lemme suivant sera généralisé par le lemme 5.3.1. Cependant, notre démonstration du Lemme 5.3.1 dépendra indirectement du cas particulier suivant. Ainsi, nous devons le prouver indépendamment.

**Lemme 5.2.6.** *Supposons que la matrice  $B$  soit obtenue à partir de  $A \in M_n(F)$ ,  $n \geq 2$ , en interchangeant deux lignes voisines. Alors*

$$\det B = -\det A.$$

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est laissée sous forme d'exercice 5.2.1.  $\square$

**Lemme 5.2.7.** *Si une matrice  $A \in M_n(F)$ ,  $n \geq 2$ , a deux lignes identiques, alors  $\det(A) = 0$ .*

*Démonstration.* En échangeant successivement les lignes voisines, on peut transformer  $A$  en une matrice  $B$  où les deux lignes identiques sont voisines. Par le lemme 5.2.6, nous avons  $\det(A) = \pm \det(B)$ . Maintenant, puisque l'échange des deux lignes identiques voisines de  $B$  laisse  $B$  inchangé, le lemme 5.2.6 nous dit que

$$\det(B) = -\det(B).$$

Ainsi  $\det(A) = \pm \det(B) = 0$ .  $\square$

## Exercices.

5.2.1. Démontrer le lemme 5.2.6. *Indice* : Utiliser (5.1) et une récurrence sur  $n$ .

5.2.2. Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  et  $c$  est un scalaire, quel est le lien entre les déterminants  $\det(A)$  et  $\det(cA)$  ?

5.2.3 ([Tre, Ex. 3.3.2]). Comment les déterminants de  $A$  et  $B$  sont-ils liés si

(a)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2a_1 & 3a_2 & 5a_3 \\ 2b_1 & 3b_2 & 5b_3 \\ 2c_1 & 3c_2 & 5c_3 \end{bmatrix};$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3a_1 & 4a_2 + 5a_1 & 5a_3 \\ 3b_1 & 4b_2 + 5b_1 & 5b_3 \\ 3c_1 & 4c_2 + 5c_1 & 5c_3 \end{bmatrix}.$$

5.2.4 ([Tre, Ex. 3.3.4]). Une matrice carrée ( $n \times n$ ) est appelée *anti-symétrique* si  $A^t = -A$ . Prouver que si  $A$  est antisymétrique et  $n$  est impair, alors  $\det(A) = 0$ . Est-ce vrai pair pour  $n$  ?

5.2.5 ([Tre, Ex. 3.3.8]). Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (c - a)(c - b)(b - a).$$

Il s'agit d'un cas particulier de ce qu'on appelle *un déterminant de Vandermonde*.

## 5.3 Caractériser les propriétés du déterminant

D'après le théorème 5.2.4, le lemme 5.2.7 et le lemme 5.2.3, nous voyons que le déterminant a les propriétés suivantes :

(D1) La fonction  $\det$  est  $n$ -linéaire.

(D2) Nous avons  $\det(A) = 0$  chaque fois que  $A$  a deux lignes identiques.

(D3) Nous avons  $\det(I_n) = 1$ .

Nous montrerons bientôt que ces propriétés *caractériser de manière unique* le déterminant. En d'autres termes, le déterminant est la *seule* application  $M_n(F) \rightarrow F$  satisfaisant les propriétés (D1)–(D3). Pour ce faire, nous prouverons certaines propriétés du déterminant en utilisant uniquement les propriétés (D1)–(D3). Par conséquent, ces faits sont vrais pour tout autre application ayant ces propriétés.

Nous commençons par analyser les effets des opérations élémentaires sur les ligne sur le déterminant.

**Lemma 5.3.1** (Déterminant sous opération de ligne de type I). *Supposons que la matrice  $B$  est obtenue à partir de  $A \in M_n(F)$  en interchangeant deux lignes. Alors*

$$\det(B) = -\det(A).$$

*En particulier  $\det(P_{i,j}) = -1$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $B$  soit obtenu à partir de  $A$  en interchangeant les lignes  $i$  et  $j$ . Soit  $u$  et  $v$  les  $i$ -ième et  $j$ -ième lignes de  $A$ , respectivement. Définissons les matrices suivantes :

- $C$  est la matrice dont  $i$ -ième et  $j$ -ième lignes sont toutes les deux  $u + v$ ,
- $M$  est la matrice dont  $i$ -ième et  $j$ -ième lignes sont toutes les deux  $u$ ,
- $N$  est la matrice dont les lignes  $i$ -ième et  $j$ -ième sont toutes les deux  $v$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \det(C) && \text{(par (D2))} \\ &= \det(A) + \det(B) + \det(M) + \det(N) && \text{(par (D1))} \\ &= \det(A) + \det(B) + 0 + 0. && \text{(par (D2))} \end{aligned}$$

Ainsi  $\det(B) = -\det(A)$ . Puisque  $P_{i,j}$  est obtenu à partir de la matrice identité en interchangeant les lignes  $i$ -ième et  $j$ -ième, nous avons

$$\det(P_{i,j}) = -\det(I_n) = -1. \quad \square$$

**Lemma 5.3.2** (Effet d'une opération de ligne de type II sur le Déterminant). *Supposons qu'une matrice  $B$  est obtenue à partir d'une matrice  $A$  en multipliant une ligne de  $A$  par un scalaire  $a \in F$ . Alors*

$$\det(B) = a \cdot \det(A).$$

*En particulier,  $\det(M_i(a)) = a$ , pour  $a \in F$ .*

*Démonstration.* La première assertion découle immédiatement de (D1). Puisque  $M_i(a)$  est obtenu à partir de la matrice d'identité en multipliant la  $i$ -ième ligne par  $a$ , nous avons

$$\det(M_i(a)) = a \det(I_n) = a \cdot 1 = a. \quad \square$$

**Lemma 5.3.3** (Effet d'une opération de ligne de type III sur le Déterminant). *Soit  $a \in F$ . Supposons qu'une matrice  $B$  est obtenue à partir d'une matrice  $A$  en ajoutant  $a$  fois la ligne  $j$  à la ligne  $i$  ( $i \neq j$ ). Alors*

$$\det(B) = \det(A).$$

*En particulier,  $\det(E_{i,j}(a)) = 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant sa ligne  $i$  par la ligne  $j$  de  $A$ . En particulier,  $C$  a deux lignes identiques (à savoir, ses lignes  $i$ -th et  $j$ -th sont les mêmes). Alors

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(A) + a \det(C) && \text{(par (D1))} \\ &= \det(A) + 0. && \text{(par (D2))} \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.3.4.** *Si  $A \in M_n(F)$  a  $\text{rang}(A) < n$ , alors  $\det(A) = 0$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 4.3.5, on peut utiliser des opérations en ligne de type I et III pour transformer la matrice  $A$  en une matrice  $B$  sous forme ligne-échelon. Par les lemmes 5.3.1 et 5.3.3, on a  $\det(A) = \pm \det(B)$ . Si  $\text{rang}(A) < n$ , alors  $B$  a une ligne nulle. Donc  $\det(B) = 0$  par (D1) (voir Exercice 5.1.3).  $\square$

**Theorem 5.3.5** (Le déterminant est multiplicatif). *Pour tout  $A, B \in M_n(F)$ , nous avons*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\text{rang}(A) < n$ . Puis  $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A) < n$  par le lemme 4.4.4. Ainsi

$$\det(A) \det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0 = \det(AB),$$

et nous avons terminé.

Supposons maintenant  $\text{rang}(A) = n$ . Les lemmes 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3 impliquent que le théorème est vrai quand  $A$  est une matrice élémentaire. Puisque  $A$  est une matrice inversible (par le lemme 4.4.2), elle peut être écrite comme un produit  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  de matrices élémentaires par Lemma 4.4.3. Alors

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) \\ &= \det(E_1) \det(E_2 \cdots E_k B) \\ &\quad \vdots \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k) \det(B) \\ &= \det(E_1 E_2) \det(E_3) \cdots \det(E_k) \det(B) \\ &\quad \vdots \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B). \end{aligned} \quad \square$$

Le théorème suivant indique que les propriétés (D1)–(D3) caractérisent de manière unique le déterminant.

**Theorem 5.3.6** (Caractérisation du déterminant). *Supposons que  $\delta: M_n(F) \rightarrow F$  est une fonction telle que*

- (a)  $\delta$  est  $n$ -linéaire,
- (b)  $\delta(A) = 0$  chaque fois que  $A$  a deux lignes identiques,
- (c)  $\delta(I_n) = 1$ .

(En d'autres termes, supposons que  $\delta$  possède les propriétés (D1)–(D3).) Alors  $\delta(A) = \det(A)$  pour tout  $A \in M_n(F)$ .

*Démonstration.* Notez tout d'abord que les résultats des lemmes 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 et du théorème 5.3.5 sont valables pour  $\delta$ , puisque leurs preuves n'utilisaient que les propriétés (D1)–(D3).

Tout d'abord, supposons que  $A$  n'est pas inversible (c'est-à-dire  $\text{rang}(A) < n$ ). Alors, par Lemme 5.3.4 (et son analogue pour  $\delta$ ), nous avons

$$\det(A) = 0 = \delta(A).$$

Supposons maintenant que  $A$  soit inversible. On peut alors écrire  $A$  comme un produit  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  de matrices élémentaires. Nous avons

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \delta(E_1) \cdots \delta(E_k) = \delta(E_1 \cdots E_k) = \delta(A). \quad \square$$

## Exercices.

5.3.1 ([Tre, Ex. 3.3.5]). Une matrice carrée  $A$  est dite *nilpotente* si  $A^k = \mathbf{0}$  pour un entier strictement positif  $k$ . Montrer que si  $A$  est une matrice nilpotente, alors  $\det(A) = 0$ .

5.3.2. Prouver que si  $A$  et  $B$  sont des matrices similaires, alors  $\det(A) = \det(B)$ .

## 5.4 Autres propriétés du déterminant

Nous concluons ce chapitre en démontrant quelques autres propriétés utiles du déterminant.

**Lemme 5.4.1.** *Une matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ . De plus, si  $A$  est inversible, alors*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

*Démonstration.* Si  $A \in M_n(F)$  n'est pas inversible, alors  $\text{rang}(A) < n$ , et donc  $\det(A) = 0$  par Lemme 5.3.4.

Supposons maintenant que  $A$  est inversible. Nous avons

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Ainsi  $\det(A) \neq 0$  et  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ . □

**Lemme 5.4.2.** *Si  $A \in M_n(F)$ , alors*

$$\det(A^t) = \det(A).$$

*Démonstration.* Si  $A$  n'est pas inversible, alors  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t) < n$  par les lemmes 4.4.9(a) et 4.4.2. Ainsi, d'après le lemme 5.3.4,  $\det(A) = 0 = \det(A^t)$ .

Supposons maintenant que  $A$  soit inversible. On peut alors écrire  $A$  comme un produit  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  de matrices élémentaires par Lemme 4.4.3. Notez que  $\det(E) = \det(E^t)$  pour toute matrice élémentaire  $E$  (Exercice 5.4.1). Ainsi,

$$\det(A^t) = \det(E_k^t \cdots E_2^t E_1^t)$$



$$\begin{aligned}
&= \det(E_k^t) \cdots \det(E_2^t) \det(E_1^t) \\
&= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k) \\
&= \det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

**Lemma 5.4.3.** *Si  $A$  est une matrice triangulaire, alors*

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

*est le produit des éléments sur la diagonale de  $A$ .*

*Démonstration.* La preuve du cas où  $A$  est triangulaire supérieur est laissée sous la forme Exercice 5.4.3. Alors le cas triangulaire inférieur découle du lemme 5.4.2.  $\square$

## Exercices.

5.4.1. Vérifier directement (c'est-à-dire sans utiliser le lemme 5.4.2) que  $\det(E) = \det(E^t)$  pour toute matrice élémentaire  $E$ .

5.4.2. Une matrice carrée  $Q$  est appelée *orthogonale* si  $Q^tQ = I$  (voir Définition 6.2.6). Prouver que si  $Q$  est une matrice orthogonale, alors  $\det(Q) = \pm 1$ .

5.4.3. Démontrer le lemme 5.4.3 dans le cas où  $A$  est triangulaire supérieur. *Indice* : Utiliser (5.1) et une récurrence sur  $n$ .

5.4.4. (a) Supposons que la matrice  $B$  soit obtenue à partir de  $A \in M_n(F)$  en intervertissant deux colonnes. Prouver que  $\det(B) = -\det(A)$ .

(b) Supposons que la matrice  $B$  soit obtenue à partir de  $A \in M_n(F)$  en multipliant une colonne de  $A$  par un scalaire  $a$ . Prouver que  $\det(B) = a \cdot \det(A)$ .

(c) Supposons que  $a$  est un scalaire et que la matrice  $B$  est obtenue à partir de  $A \in M_n(F)$  en ajoutant  $a$  fois la  $j$ -ième colonne à la  $i$ -ième colonne. Prouver que  $\det(B) = \det(A)$ .

5.4.5. Prouver que le déterminant peut être calculé par expansion de cofacteur le long de n'importe quelle ligne ou colonne. Plus précisément, si  $A \in M_n(F)$  avec  $n \geq 2$ , prouver que

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \cdot a_{i,j} \quad \text{pour tous } 1 \leq j \leq n, \quad (5.2)$$

et que

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \cdot a_{i,j} \quad \text{pour tous } 1 \leq i \leq n. \quad (5.3)$$

*Indice* : Pour prouver (5.2), soit  $B$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en intervertissant les première et  $j$ -ième colonnes. Associez  $\det(A)$  à  $\det(B)$  et calculez  $\det(B)$  à l'aide de (5.1).

5.4.6 ([Tre, Ex. 3.3.9]). Soit  $A$  une matrice carrée. Montrer que les matrices triangulaires blocs

$$\begin{bmatrix} I & M \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & M \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ M & A \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ M & I \end{bmatrix}$$

ont tous un déterminant égal à  $\det(A)$ . Ici  $M$  est une matrice arbitraire.

5.4.7 ([Tre, Ex. 3.3.10]). Utilisez Exercice 5.4.6 pour montrer que, si  $A$  et  $C$  sont des matrices carrées, alors

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} = \det(A) \det(C).$$

Ici  $B$  est une matrice arbitraire. *Indice* :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}.$$

5.4.8 ([Tre, Ex. 3.3.11]). Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ , et soit  $B$  une matrice  $n \times m$ . Montrez que

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det(AB).$$

*Indice* : Bien qu'il soit possible de transformer la matrice par opérations sur les lignes en une forme où le déterminant est facile à calculer, le moyen le plus simple est de multiplier à droite par

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ B & I \end{bmatrix}.$$

5.4.9 ([Tre, Ex. 3.5.5]). Soit  $D_n$  le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

où toutes les entrées non spécifiées sont nulles. En utilisant le développement en cofacteurs, montrez que  $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ . Ceci (avec un calcul de  $D_1$  et  $D_2$ ) implique que  $D_n$  est le  $n$ -ième nombre de Fibonacci.

# Chapitre 6

## Espaces pré-euclidien

Dans ce chapitre, nous étudions les espaces pré-euclidien, qui sont des espaces vectoriels équipé d'une structure additionnel. Cette structure est la notion de *produit scalaire*, qui peut être considéré comme une généralisation du produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$  à des espaces vectoriels arbitraires. En particulier, lorsqu'on a un produit scalaire, on peut parler de la *longueur* (ou norme) d'un vecteur. Le matériel de ce chapitre correspond à peu près à [Tre, Ch. 5].

### 6.1 Définitions

**Definition 6.1.1** (Espace pré-euclidien). Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel  $V$  est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

vérifiant

- (a)  $\langle v, v \rangle \geq 0$  et  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$  pour tous les  $v \in V$ ,
- (b)  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  pour tous les  $v, w \in V$ , et
- (c)  $\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, w \rangle = c_1 \langle v_1, w \rangle + c_2 \langle v_2, w \rangle$  pour tous les  $v_1, v_2, w \in V$  et  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Un *pré-euclidien* est un espace vectoriel réel  $V$  munit d'un produit scalaire.

*Remark 6.1.2.* Les propriétés (b) et (c) impliquent que

$$\langle v, c_1 w_1 + c_2 w_2 \rangle = c_1 \langle v, w_1 \rangle + c_2 \langle v, w_2 \rangle$$

pour tous les  $v, w_1, w_2 \in V$  et  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire.

*Example 6.1.3.* Sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &:= x \cdot y && \text{(produit scalaire)} \\ &= x^t y && \text{(produit matriciel)} \end{aligned}$$

est un produit scalaire, appelé le *produit scalaire canonique* sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Exemple 6.1.4.* Sur  $C[a, b] := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}$ ,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire. La propriété (a) est la seule propriété difficile à vérifier. Cela repose sur le fait que si  $h$  est une fonction continue à valeurs réelles sur  $[a, b]$  et  $h(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , alors

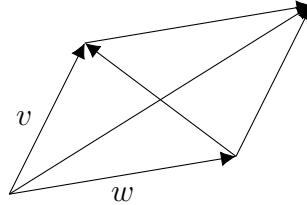
$$\int_a^b h(t) dt = 0 \iff h(t) = 0 \forall t \in [a, b].$$

**Definition 6.1.5** (Norme). Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace pré-euclidien, alors la *norme* d'un vecteur  $v \in V$  est défini comme étant

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Theorem 6.1.6.** Si  $V$  est un espace pré-euclidien, alors

- (a)  $\|v\| = 0 \iff v = 0$  pour tous les  $v \in V$ ,
- (b)  $\|cv\| = |c| \|v\|$  pour tous les  $c \in \mathbb{R}$  et  $v \in V$ ,
- (c)  $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$  pour tous les  $v, w \in V$  (Identité de polarisation), et
- (d)  $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$  pour tous les  $v, w \in V$  (Règle du parallélogramme).



*Démonstration.* La preuve de ces équations est laissée comme l'exercice 6.1.1. □

**Theorem 6.1.7** (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace pré-euclidien, alors

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V,$$

et l'égalité est vraie ci-dessus si et seulement si  $\{v, w\}$  est une famille liée.

*Démonstration.* Soit

$$p(t) = \langle v + tw, v + tw \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors  $p(t) \geq 0$  pour tous les  $t \in \mathbb{R}$ . À présent

$$p(t) = \langle v, v \rangle + t\langle v, w \rangle + t\langle w, v \rangle + t^2\langle w, w \rangle = \|v\|^2 + 2t\langle v, w \rangle + t^2\|w\|^2,$$

et donc  $p$  est un polynôme quadratique. Comme  $p(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il peut avoir au plus une racine. Rappelons que si un polynôme  $p(t) = at^2 + bt + c$  a au plus une racine, alors  $b^2 - 4ac \leq 0$  (avec égalité si et seulement si  $p$  a exactement une racine). Ainsi

$$b^2 - 4ac = 4\langle v, w \rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0 \implies |\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|.$$

On a l'égalité si et seulement si il existe un *unique*  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$0 = p(t_0) = \langle v + t_0 w, v + t_0 w \rangle,$$

ce qui implique que  $v + t_0 w = 0$ , et donc  $\{v, w\}$  est une famille liée.  $\square$

*Exemple 6.1.8.* Dans le cadre de l'exemple 6.1.4, nous avons

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt \cdot \int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Ce n'est pas du tout un fait évident. (Essayez de le prouver directement en utilisant des méthodes de l'analyse — c'est difficile!)

**Corollaire 6.1.9** (Inégalité triangulaire). *Si  $V$  est un espace pré-euclidien, alors pour tout  $v, w \in V$ ,*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

*C'est ce qu'on appelle l'inégalité triangulaire.*

*Démonstration.* Nous avons

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Prendre les racines carrées donne l'inégalité triangulaire.  $\square$

## Exercices.

6.1.1. Démontrer le théorème 6.1.6. *Indice* : Remplacer les normes par des produit scalaires. Pour les deux dernières parties, développez les deux côtés de chaque équation.

6.1.2 ([Ber14, 5.1.1]). Montrer que si  $v$  et  $w$  sont des vecteurs dans un espace pré-euclidien tel que

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 = \langle v, w \rangle,$$

alors  $v = w$ .

6.1.3. Soit  $u, v$  des vecteurs dans un espace pré-euclidien, montrez que

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

6.1.4 ([Ber14, 5.1.3]). Pour les vecteurs non nuls  $v, w$  dans un espace pré-euclidien, prouver que  $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$  si et seulement si  $v = cw$  pour certains  $c > 0$ . *Indice* : Inspecter la preuve du Corollaire 6.1.9, puis appliquer la deuxième assertion du Théorème 6.1.7.

6.1.5 ([Ber14, Ex. 5.1.6]). Supposons que  $r_1, \dots, r_n$  soient des nombres réels strictement positif. Montrer que

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n r_i a_i b_i,$$

pour  $x = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $y = (b_1, \dots, b_n)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  (différent du produit scalaire canonique, sauf  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ ).

6.1.6 ([Ber14, Ex. 5.1.7]). Dans l'espace pré-euclidien du produit de l'exemple 6.1.4, prouvez que si  $f$  et  $g$  sont continuellement différentiables (c'est-à-dire que les dérivées  $f'$  et  $g'$  existent et sont continue), alors

$$\langle f, g' \rangle + \langle f', g \rangle = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

*Indice* : Intégration par parties.

6.1.7 ([Ber14, Ex. 5.1.9]). Supposons que  $V$  est un espace pré-euclidien et que  $T: V \rightarrow V$  est une application linéaire. Montrer que

$$\langle Tu, Tv \rangle = \frac{1}{4} (\|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2)$$

pour tous les vecteurs  $u$  et  $v$ . *Indice* : Utilisez le théorème 6.1.6.

## 6.2 Orthogonalité

**Definition 6.2.1** (Orthogonal et orthonormée). Si  $V$  est un espace pré-euclidien et  $v, w \in V$ , on dit que  $v$  et  $w$  sont *orthogonal*, et on écrit  $v \perp w$ , si  $\langle v, w \rangle = 0$ . On dit qu'un ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de vecteurs dans  $V$  est orthogonal si

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \|v_i\|^2 \neq 0, & i = j. \end{cases}$$

En d'autres termes, ils sont non nuls et orthogonaux deux à deux. On dit que l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_m\}$  est *orthonormée* ou *orthonormale* si elle est orthogonal et  $\|u_i\| = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  (i.e. chaque  $u_i$  est un *vecteur unité*).

**Theorem 6.2.2.** *Si la famille  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est orthogonal, alors elle est libre.*

*Démonstration.* Supposons

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

pour certains scalaires  $c_1, \dots, c_n$ . Alors pour chaque  $j = 1, \dots, n$ ,

$$0 = \langle \mathbf{0}, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, v_j \rangle = c_j \|v_j\|^2.$$

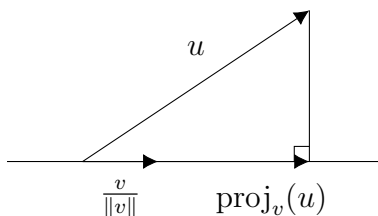
Depuis  $\|v_j\|^2 \neq 0$ , cela implique  $c_j = 0$ . Comme cela est vrai pour tout  $j = 1, \dots, n$ , on voit que l'ensemble est libre.  $\square$

**Definition 6.2.3** (Projection). Supposons que  $V$  est un espace pré-euclidien. Pour  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , on appelle *projection* l'application  $\text{proj}_v: V \rightarrow V$  défini par

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Noter que

$$\text{proj}_v u = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}.$$



**Theorem 6.2.4.** Si  $U$  est un sous-espace de dimension finie d'un espace pré-euclidien  $V$ , alors  $U$  a une base orthogonale (donc une base orthonormée également).

La preuve de ce théorème repose sur un processus appelé *algorithme de Gram-Schmidt* ou *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

*Démonstration.* Soit  $\{v_1, \dots, v_k\}$  une base quelconque de  $U$ . Nous produisons une base orthogonale  $\{w_1, \dots, w_k\}$  de  $U$  comme suit.

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2 \\ w_3 &= v_3 - \text{proj}_{w_1} v_3 - \text{proj}_{w_2} v_3 \\ &\vdots \\ w_k &= v_k - \sum_{l=1}^{k-1} \text{proj}_{w_l} v_k. \end{aligned}$$

Nous affirmons que  $\{w_1, \dots, w_k\}$  est une famille orthogonal. Il découle alors du théorème 6.2.2 qu'elle est linéairement indépendante, et donc une base de  $U$  (puisque  $U$  a la dimension  $k$ ).

Nous prouvons l'affirmation par récurrence. Pour  $1 \leq n \leq k$ , soit  $P(n)$  l'assertion selon laquelle

- (a)  $\text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ , et
- (b)  $\{w_1, \dots, w_n\}$  est orthogonal.

Nous savons que  $P(1)$  est vrai car  $\text{Span}\{w_1\} = \text{Span}\{v_1\}$  (depuis  $w_1 = v_1$ ) et  $\{w_1\} = \{v_1\}$  est orthogonal car  $w_1 = v_1 \neq 0$ .

Maintenant, nous montrons que, pour  $1 \leq n < k$ ,  $P(n) \implies P(n+1)$ . Supposons donc que  $P(n)$  est vrai. En d'autres termes,  $\text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$  et  $\{w_1, \dots, w_n\}$  est orthogonal. Alors, pour  $1 \leq i \leq n$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle w_{n+1}, w_i \rangle &= \langle v_{n+1}, w_i \rangle - \left\langle \sum_{l=1}^n \frac{\langle v_{n+1}, w_l \rangle}{\|w_l\|^2} w_l, w_i \right\rangle \\ &= \langle v_{n+1}, w_i \rangle - \sum_{l=1}^n \frac{\langle v_{n+1}, w_l \rangle}{\|w_l\|^2} \langle w_l, w_i \rangle \\ &= \langle v_{n+1}, w_i \rangle - \frac{\langle v_{n+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \langle w_i, w_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, si  $w_{n+1} = 0$ , alors

$$v_{n+1} = \sum_{l=1}^n \frac{\langle v_{n+1}, w_l \rangle}{\|w_l\|^2} w_l \in \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\},$$

et donc, par l'hypothèse de récurrence  $P(n)$ (a),  $v_{n+1} \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . Mais cela est impossible puisque  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  est linéairement indépendant. Ainsi  $w_{n+1} \neq 0$  et donc  $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$  est orthogonal. Donc  $P(n+1)$ (b) est valide.

À présent,

$$w_{n+1} \in \text{Span}\{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{n+1}\},$$

puisque  $P(n)$ (a) tient, donc

$$\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n+1}\} \subseteq \text{Span}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}.$$

En outre,

$$v_{n+1} = w_{n+1} + \sum_{l=1}^n \text{proj}_{w_l} v_{n+1} \in \text{Span}\{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\},$$

pour que

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq \text{Span}\{w_1, \dots, w_{n+1}\}.$$

Ainsi  $P(n+1)$ (a) est également valable. Ceci termine la preuve par récurrence.

On peut alors former une base orthonormée

$$\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_k}{\|w_k\|} \right\}. \quad \square$$

*Exemple 6.2.5.* Prenez  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  avec le produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Notez que, après avoir restreint le domaine des fonctions polynomiales à  $[-1, 1]$ ,  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  est un sous-espace de l'espace de l'espace pré-euclidien  $C[-1, 1]$  (puisque les polynômes sont



continus) et ce qui précède est la restriction du produit scalaire sur  $C[-1, 1]$  (voir Exemple 6.1.4) à  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $\{1, t, t^2\}$  la base standard de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Nous trouverons une base orthonormale en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt. Nous avons

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, \\ w_2 &= t - \text{proj}_1 t = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 \end{aligned}$$

À présent,

$$\langle t, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t \cdot 1 \, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} w_2 &= t - 0 = t \\ w_3 &= t^2 - \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle t^2, t \rangle}{\|t\|^2} t. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle t^2, 1 \rangle &= \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}, \\ \|1\|^2 &= \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt = 2, \\ \langle t^2, t \rangle &= \int_{-1}^1 t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$w_3 = t^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\left\{ 1, t, t^2 - \frac{1}{3} \right\}$$

est une base orthogonale de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

Maintenant, si nous voulions une base orthonormée de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , nous calculons

$$\|1\| = \sqrt{2}, \quad \|t\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3} \implies \|t\| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

et

$$\|w_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left( t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \, dt = \int_{-1}^1 \left( t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \right) \, dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{9} t^3 + \frac{1}{9} t \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Soit

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\sqrt{6}}{2} t, \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left( t^2 - \frac{1}{3} \right).$$

et donc  $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Les bases orthogonales sont pratiques, puisque si  $\{u_1, \dots, u_k\}$  est une base orthogonale pour  $U$ , et  $v \in U$ , alors

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.$$

(Voir Exercice 6.2.4.) En d'autres termes,

$$v = \sum_{i=1}^k c_i u_i, \quad \text{où } c_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$$

sont les *Coefficients de Fourier* de  $v$  par rapport à  $u_1, \dots, u_k$ . C'est pratique, car cela nous fait gagner du temps. Nous n'avons pas besoin de résoudre un système linéaire pour trouver les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  comme nous aurions normalement besoin de le faire. Le calcul des coefficients de Fourier demande généralement moins de travail (Quand nous avons une base orthogonale).

**Definition 6.2.6** (Matrice orthogonale). Une matrice  $A \in M_n(F)$  est appelée *orthogonal* si  $A^t A = I$ .

**Lemma 6.2.7.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  (avec le produit scalaire comme produit scalaire).

*Démonstration.* Soit  $A = [v_1 \ \dots \ v_n]$  (c'est-à-dire  $v_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $A$ ). Alors

$$A^t A = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} [v_1 \ \dots \ v_n].$$

Ainsi, l'entrée  $(i, j)$  de  $A^t A$  est  $v_i^t v_j$ . Ainsi

$$A^t A = I_n \iff v_i^t v_j = \delta_{ij} \iff \{v_1, \dots, v_n\} \text{ est orthonormé.}$$

Puisque  $F^n$  est  $n$ -dimensionnel et que les familles orthonormées sont linéairement indépendantes, le résultat suit.  $\square$

**Definition 6.2.8** (supplémentaire orthogonal). Soit  $U$  un sous-ensemble d'un espace pré-euclidien  $V$ . Puis on définit

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}.$$

Si  $U$  est un *sous-espace* (par opposition à juste un sous-ensemble), alors  $U^\perp$  est appelé le *supplémentaire orthogonal* de  $U$ . La notation  $U^\perp$  se lit " $U$  orthogonale".

**Theorem 6.2.9.** Supposons que  $V$  est un espace pré-euclidien et que  $U$  est un sous-espace de dimension finie de  $V$ . Alors

(a)  $U^\perp$  est aussi un sous-espace de  $V$ , et

$$(b) V = U \oplus U^\perp.$$

La preuve utilisera l'idée importante de « dualité » dans les espaces pré-euclidien.

**Lemma 6.2.10.** *Supposons que  $V$  est un espace pré-euclidien. Définissons  $\varphi: V \rightarrow V^*$  par*

$$\varphi(v)(w) = \langle v, w \rangle.$$

*Si  $V$  est de dimension finie, alors  $\varphi$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Supposons  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  et  $v_1, v_2 \in V$ . Alors pour tout  $w \in V$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(c_1v_1 + c_2v_2)(w) &= \langle c_1v_1 + c_2v_2, w \rangle \\ &= c_1\langle v_1, w \rangle + c_2\langle v_2, w \rangle \\ &= (c_1\varphi(v_1))(w) + c_2\varphi(v_2)(w). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\varphi(v_1) + c_2\varphi(v_2),$$

et donc  $\varphi$  est linéaire. Comme  $\dim V = \dim V^*$ , il suffit de montrer que  $\varphi$  est injectif. Supposons  $\varphi(v) = 0$  pour certains  $v \in V$ . on note que

$$0 = \varphi(v)(v) = \langle v, v \rangle \|v\|^2,$$

et donc  $v = 0$ . Donc  $\varphi$  est injectif et donc un isomorphisme.  $\square$

**Corollary 6.2.11** (Théorème de représentation de Riesz). *Si  $V$  est un espace pré-euclidien, alors pour tout  $f \in V^*$ , il existe un  $v \in V$  unique tel que*

$$f(w) = \langle v, w \rangle, \quad \forall w \in V.$$

*En d'autres termes, toutes les formes linéaires sur  $V$  sont données par le produit scalaire avec un vecteur fixe de  $V$ .*

*Démonstration.* Cela découle du fait que  $\varphi$  dans le lemme 6.2.10 est bijectif.  $\square$

*Preuve du Théorème 6.2.9.* La preuve de la partie (a) est laissée comme exercice 6.2.1. Nous prouverons la partie (b). Nous devons donc montrer que  $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$  et  $U + U^\perp = V$ . Supposons  $v \in U \cap U^\perp$ . Alors

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U,$$

comme  $v \in U^\perp$ . Mais puisque nous avons aussi  $v \in U$ , nous avons  $\langle v, v \rangle = 0$ . Ainsi  $v = \mathbf{0}$ . Donc  $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$ .

Maintenant, nous montrons  $U + U^\perp = V$ . Soit  $v \in V$  et définissons

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u) = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in U.$$

Puis  $f \in U^*$ . Maintenant,  $U$  est un espace pré-euclidien de dimension finie (nous restreignons simplement le produit scalaire sur  $V$  à  $U$ ). Par conséquent, d'après le théorème de représentation de Riesz pour  $U$ , il existe un  $\tilde{u} \in U$  tel que

$$f(u) = \langle \tilde{u}, u \rangle \quad \forall u \in U.$$

Par conséquent,

$$\langle \tilde{u}, u \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in U \implies \langle v - \tilde{u}, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U \implies v - \tilde{u} \in U^\perp.$$

Alors

$$v = \tilde{u} + (v - \tilde{u}) \in U + U^\perp.$$

Puisque  $v$  était arbitraire, nous avons  $V = U + U^\perp$ .  $\square$

**Corollary 6.2.12.** *Si  $U$  est un sous-espace d'un espace pré-euclidien de dimension finie  $V$ , alors*

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

**Corollary 6.2.13.** *Rappelons que si  $U$  est un sous-espace de dimension finie d'un espace pré-euclidien  $V$ , alors  $V = U \oplus U^\perp$  (Théorème 6.2.9(b)). Définir*

$$\text{proj}_U: V \rightarrow V, \quad \text{proj}_U(u + x) = u, \quad u \in U, \quad x \in U^\perp.$$

Cette application a les propriétés suivantes :

- (a)  $\text{Im proj}_U = U$ ,
- (b)  $\text{Ker proj}_U = U^\perp$ ,
- (c)  $\langle v - \text{proj}_U v, u \rangle = 0$  pour tous les  $v \in V$ ,  $u \in U$ ,
- (d)  $\|v - \text{proj}_U v\| \leq \|v - u\|$  pour tous les  $u \in U$ , et l'égalité est vraie si et seulement si  $u = \text{proj}_U v$ .

*Démonstration.* Les instructions (a) et (b) sont faciles. Si  $v = u + x = \text{proj}_U v + x$  (pour  $u \in U$ ,  $x \in U^\perp$ ), alors  $v - \text{proj}_U v = x \in U^\perp$ , donc (c) est valable.

Il reste à montrer (d). Soit  $\tilde{u} = \text{proj}_U v$ , donc  $v = \tilde{u} + x$ , avec  $x \in U^\perp$ . Maintenant, laissez  $u$  être n'importe quel vecteur dans  $U$ . Alors

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|v - \tilde{u} + \tilde{u} - u\|^2 \\ &= \|x + (\tilde{u} - u)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, \tilde{u} - u \rangle + \|\tilde{u} - u\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|\tilde{u} - u\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi

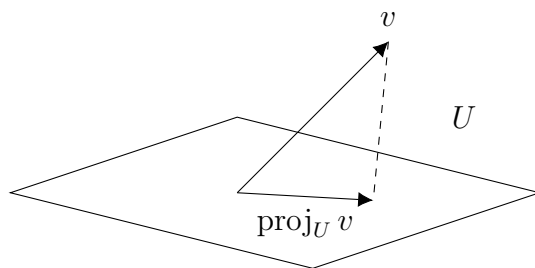
$$\|v - u\|^2 = \|v - \tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u} - u\|^2$$

et donc

$$\|v - u\|^2 \geq \|v - \tilde{u}\|^2.$$

De plus, l'égalité est vraie si et seulement si  $\|\tilde{u} - u\|^2 = 0$ , c'est-à-dire  $u = \tilde{u} = \text{proj}_U v$ .  $\square$

L'application  $\text{proj}_U$  s'appelle la *projection orthogonale* sur  $U$ . Le vecteur  $\text{proj}_U v$  est la "meilleure approximation" de  $v$  par un vecteur dans  $U$ .



*Remark 6.2.14.* Si  $\{u_1, \dots, u_k\}$  est une base orthogonale pour  $U$ , alors une formule explicite pour  $\text{proj}_U v$  est

$$\text{proj}_U v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.$$

En effet, si  $v'$  dénote la formule à droite de l'égalité, alors  $v' \in U$ , et un court calcul montre que  $v - v' \in U^\perp$ . Par unicité de la décomposition  $v = \tilde{u} + x$ ,  $\tilde{u} \in U$ ,  $x \in U^\perp$ , on conclut que  $v' = \text{proj}_U v$ .

**Corollary 6.2.15.** Si  $U$  est un sous-espace d'un espace pré-euclidien de dimension finie  $V$ , alors  $(U^\perp)^\perp = U$ .

*Démonstration.* Si  $u \in U$ , alors  $\langle u, v \rangle = 0$  pour tout  $v \in U^\perp$ . Ainsi, par définition,  $u \in (U^\perp)^\perp$ . Donc  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ . En outre,

$$\dim (U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U.$$

Ainsi  $U = (U^\perp)^\perp$ . □

**Corollary 6.2.16.** Supposons que  $U$  est un sous-espace d'un espace pré-euclidien de dimension finie  $V$ . Alors l'isomorphisme  $\varphi: (U \oplus U^\perp) = V \rightarrow V^*$  du lemme 6.2.10 satisfait  $\varphi(U^\perp) = U^0$ .

*Démonstration.* Nous avons

$$\varphi(v) \in U^0 \iff \varphi(v)(u) = 0 \forall u \in U \iff \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U \iff v \in U^\perp. \quad \square$$

## Exercices.

6.2.1. Supposons que  $U$  est un sous-ensemble d'un espace pré-euclidien  $V$ .

(a) Montrer que  $U^\perp$  est un sous-espace de  $V$ .

- (b) Montrer que  $U^\perp = V$  si et seulement si  $U = \emptyset$  ou  $U = \{\mathbf{0}\}$ . *Note* : Nous ne faisons aucune hypothèse ici sur le fait que  $U$  ou  $V$  sont de dimension finie ou que  $U$  est un sous-espace vectoriel.

6.2.2. Démontrer que les vecteurs  $u, v$  dans un espace pré-euclidien sont orthogonaux si et seulement si  $\|u + v\| = \|u - v\|$ .

6.2.3. Pour les vecteurs  $u, v$  dans un espace pré-euclidien, prouver que  $\|u\| = \|v\|$  si et seulement si  $u + v$  et  $u - v$  sont orthogonaux.

6.2.4. Prouver que si  $\{u_1, \dots, u_k\}$  est une base orthogonale pour un espace pré-euclidien  $U$ , et  $v \in U$ , alors

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.$$

6.2.5 ([Ber14, 5.1.2]). (*Inégalité de Bessel*) Dans un espace pré-euclidien  $V$ , si  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs unités orthogonaux deux à deux (c'est-à-dire  $\|x_i\| = 1$  pour tout  $i$ , et  $x_i \perp x_j$  quand  $i \neq j$ ) alors

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{pour tous } x \in V.$$

*Indice* : Définissez  $c_i = \langle x, x_i \rangle$ ,  $y = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  et  $z = x - y$ . Montrez que  $y \perp z$  et appliquez l'exercice 6.1.3 à  $x = y + z$  pour conclure que  $\|x\|^2 \geq \|y\|^2$ .

6.2.6 ([Ber14, Ex. 5.1.5]). Supposons que  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs dans un espace pré-euclidien qui sont orthogonaux par paires, c'est-à-dire  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  pour  $i \neq j$ .

- (a) Prouver que  $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ .  
 (b) En déduire une preuve alternative du Théorème 6.2.2.

6.2.7 ([Ber14, Ex. 5.2.2]). Soit  $X$  un ensemble et soit  $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$  (voir exemple 1.2.5). Soit  $W \subseteq V$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in V$  dont le support

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

est un sous-ensemble fini de  $X$ . Démonstrez les affirmations suivantes :

- (a)  $W$  est un sous-espace de  $V$ .  
 (b) La formule

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x)$$

définit un produit scalaire sur  $W$ . (Notez que, même si l'ensemble  $X$  peut être infini, la somme ci-dessus a au plus un nombre fini de termes non nuls, et est donc bien définie.)

- (c) La formule

$$\varphi(f) = \sum_{x \in X} f(x)$$

définit une forme linéaire sur  $W$ .

- (d) Si  $X$  est infini, il n'existe pas  $g \in W$  tel que  $\varphi(f) = \langle f, g \rangle$  pour tout  $f \in W$ .

6.2.8 ([Ber14, Ex. 5.2.4]). Si  $V$  est un espace pré-euclidien (pas nécessairement de dimension finie), alors  $U = (U^\perp)^\perp$  pour chaque sous-espace de dimension finie  $U$ . *Indice* : La preuve du Corollaire 6.2.15 n'est pas applicable ici, puisque nous ne supposons pas que  $V$  est de dimension finie. Le problème est de montrer que  $(U^\perp)^\perp \subseteq U$ . Si  $x \in (U^\perp)^\perp$  et  $x = y + z$ , avec  $y \in U$  et  $z \in U^\perp$ , comme dans Théorème 6.2.9, alors  $z = x - y \in (U^\perp)^\perp$ , donc  $z \perp z$ .

6.2.9 ([Ber14, Ex. 5.2.6]). Supposons que  $U$  et  $V$  soient des sous-espaces d'un espace pré-euclidien. Démontrez que :

- (a)  $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$  ;
- (b)  $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$ .

*Indice* : Utilisez le corollaire 6.2.15.

6.2.10 ([Ber14, Ex. 5.2.7]). Considérez  $\mathbb{R}^3$  avec le produit scalaire canonique. Si

$$V = \text{Span}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\},$$

calculez  $V^\perp$ .

### 6.3 Adjoint

Rappelons (Lemme 6.2.10) que si  $V$  est un espace pré-euclidien, alors nous avons un isomorphisme

$$\varphi_V: V \rightarrow V^*, \quad \varphi_V(v)(w) = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in V. \tag{6.1}$$

**Definition 6.3.1** (Adjoint d'une application linéaire). Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire entre des espaces pré-euclidien de dimension finie, l'*adjoint* de  $T$  est l'application linéaire  $T^*: W \rightarrow V$  définie par

$$T^* = \varphi_V^{-1} \circ T^* \circ \varphi_W,$$

où  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  est l'application transposée de  $T$  de la définition 3.7.7.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{T^*} & W \\ \varphi_V^{-1} \uparrow & & \downarrow \varphi_W \\ V^* & \xleftarrow{T^*} & W^* \end{array}$$

**Proposition 6.3.2.** Si  $T: V \rightarrow V$  est une application linéaire sur un espace pré-euclidien de dimension finie, alors

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \forall v, w \in V. \tag{6.2}$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi = \varphi_V: V \rightarrow V^*$  l'isomorphisme (6.1). Puis  $T^* = \varphi^{-1} \circ T^* \circ \varphi$  et donc  $\varphi \circ T^* = T^* \circ \varphi$ . Maintenant, pour tout  $v, w \in V$ , nous avons

$$(\varphi \circ T^*)(w)(v) = (\varphi(T^*w))(v) = \langle T^*w, v \rangle = \langle v, T^*w \rangle,$$

tandis que

$$(T^* \circ \varphi)(w)(v) = T^*(\varphi(w))(v) = \varphi(w)(Tv) = \langle w, Tv \rangle = \langle Tv, w \rangle.$$

Ainsi

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \forall v, w \in V. \quad \square$$

**Proposition 6.3.3.** *Si  $V$  est un espace de produit pré-euclidien de dimension finie, alors la propriété (6.2) caractérise l'adjoint. En d'autres termes, si  $S: V \rightarrow V$  satisfait*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle \quad \forall v, w \in V,$$

puis  $S = T^*$ .

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned} \langle Tv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle \quad \forall v, w \in V &\implies \langle v, Sw \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \forall v, w \in V && \text{(par (6.2))} \\ &\implies \langle v, (S - T^*)w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in V \\ &\implies (S - T^*)w = 0 \quad \forall w \in V \\ &\implies S = T^*. \end{aligned}$$

Pour le deuxième  $\iff$  ci-dessus, l'implication directe  $\implies$  s'obtiens en prenant  $v = (S - T^*)w$ . Cela donne  $\langle (S - T^*)w, (S - T^*)w \rangle = 0$ , ce qui implique que  $(S - T^*)w = \mathbf{0}$  par définition 6.1.1(a).  $\square$

*Remark 6.3.4.* Souvent dans la littérature, le même symbole est utilisé pour la transposée et l'adjoint. C'est parce que l'isomorphisme  $\varphi: V \rightarrow V^*$  est tellement "naturel" pour un espace pré-euclidien que nous l'"effaçons" dans l'équation  $\varphi \circ T^* = T^* \circ \varphi$ . De plus, comme nous le verrons plus loin, dans l'exemple classique de  $\mathbb{R}^n$  avec le produit scalaire, l'adjoint correspond à la transposée d'une matrice.

**Theorem 6.3.5.** *Soit  $A = M_n(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire que  $A$  est une matrice  $n \times n$  avec des entrées réelles). Supposons que  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est défini par  $T(v) = Av$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ . Alors si  $\mathbb{R}^n$  est munit de son produit scalaire canonique, nous avons*

$$T^*(v) = A^t v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

*Démonstration.* Soit  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle Tv, w \rangle &= (Av) \cdot w && \text{(produit scalaire)} \\ &= (Av)^t w && \text{(produit matriciel)} \\ &= (v^t A^t) w \\ &= v^t A^t w \\ &= v \cdot (A^t w) \\ &= \langle v, A^t w \rangle. \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 6.3.3,  $T^*(v) = A^t v$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$



**Definition 6.3.6** (Transformation orthogonale, isométrie). Une *transformation orthogonale*, ou *isométrie*, est une application linéaire  $T: V \rightarrow V$  sur un espace pré-euclidien  $V$  qui préserve le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle, \quad \text{pour tous } u, v \in V.$$

**Corollary 6.3.7.** Une application linéaire  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une transformation orthogonale pour le produit scalaire canonique si et seulement si sa matrice, relative à la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , est une matrice orthogonale.

*Démonstration.* Soit  $A$  la matrice de  $T$  relative à la base canonique de  $\mathbb{R}$ . Puis  $Tv = Av$  pour tous les  $v \in \mathbb{R}^n$ . Nous avons

$$\begin{aligned} T \text{ est orthogonal} &\iff \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \text{ pour tous } u, v \in V \\ &\iff \langle u, T^*Tv \rangle = \langle u, v \rangle \text{ pour tous } u, v \in V \\ &\iff \langle u, A^tAv \rangle = \langle u, v \rangle \text{ pour tous } u, v \in V \\ &\iff \langle u, A^tAv - v \rangle = 0 \text{ pour tous } u, v \in V \\ &\iff A^tAv - v = \mathbf{0} \text{ pour tous } v \in V && \text{(comme dans la preuve de la Prop. 6.3.3)} \\ &\iff A^tAv = v \text{ pour tous } v \in V \\ &\iff A^tA = I \\ &\iff A \text{ est orthogonal.} \quad \square \end{aligned}$$

Voir Exercice 6.3.5 pour une généralisation du Corollaire 6.3.7.

## Exercices.

6.3.1 ([Ber14, Ex. 5.3.1]). Considérez  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  comme des espaces pré-euclidien avec les produits scalaire canoniques. Soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$T(a, b, c) = (2a - c, 3b + 4c).$$

- Trouver la matrice de  $T^*$  relative aux bases orthonormées canoniques.
- Trouver la matrice de  $T^*$  relative à la base  $\frac{1}{2}(1, \sqrt{3}), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  et à la base canonique  $e_1, e_2, e_3$  de  $\mathbb{R}^3$ .

6.3.2 ([Ber14, Ex. 5.3.3]). Supposons que  $U$  et  $V$  soient des espaces pré-euclidien, et que  $T: U \rightarrow V, S: V \rightarrow U$  soient des applications telles que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Sv \rangle \quad \text{pour tous } u \in U, v \in V.$$

Prouver que  $S$  et  $T$  sont linéaires (et  $S = T^*$  quand  $U$  et  $V$  sont de dimension finie).

6.3.3 ([Ber14, Ex. 5.3.4]). Pour  $A, B$  dans l'espace vectoriel  $M_n(\mathbb{R})$  des matrices réelles  $n \times n$ , définissez

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t).$$

Prouver que  $M_n(\mathbb{R})$  est un espace de pré-euclidien et trouver la formule de  $\|A\|$  en fonction de ses entrées  $a_{i,j}$ .

6.3.4 ([Ber14, Ex. 5.3.7]). Supposons que  $U$  et  $V$  sont des espaces pré-euclidien de dimension finie,  $T: U \rightarrow V$  est une application linéaire,  $A$  est un sous-ensemble de  $U$  et  $B$  est un sous-ensemble de  $V$ . Démontrez que :

- (a)  $T(A)^\perp = (T^*)^{-1}(A^\perp)$  ;
- (b)  $T^*(B)^\perp = T^{-1}(B^\perp)$  ;
- (c)  $T(U)^\perp = \text{Ker } T^*$ , donc  $V = T(U) \oplus \text{Ker } T^*$  ;
- (d)  $T^*(V)^\perp = \text{Ker } T$ , donc  $U = T^*(V) \oplus \text{Ker } T$  ;
- (e)  $T(A) \subseteq B \implies T^*(B^\perp) \subseteq A^\perp$ .

6.3.5. Supposons que  $B$  est une base orthonormée d'un espace pré-euclidien de dimension finie  $V$  et  $T: V \rightarrow V$  est une application linéaire. Montrer que  $T$  est une transformation orthogonale si et seulement si  $[T]_B^B$  est une matrice orthogonale. (Ceci généralise le Corollaire 6.3.7.)

6.3.6 ([Ber14, Ex. 12.4.3]). Supposons que  $V$  et  $W$  soient des espaces pré-euclidien de dimension finie et  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ .

- (a) Prouver que  $T$  et  $T^*$  ont le même rang.
- (b) Prouver que  $T$  et  $T^*T$  ont le même noyau et le même rang.

# Chapitre 7

## Diagonalisation

Dans ce dernier chapitre, nous étudions les vecteurs propres, les valeurs propres et la diagonalisation. Vous avez vu ces concepts dans MAT 1741. Ici, nous les discutons plus en détail. En particulier, nous discutons en détails la diagonalisabilité des matrices symétriques. Ce chapitre correspond à peu près à [Tre, Ch. 4].

Tout au long de ce chapitre,  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$ . Si  $V$  est de dimension finie,  $T \in \mathcal{L}(V)$  et  $B$  est une base ordonnée pour  $V$ , nous écrirons  $[T]_B$  pour  $[T]_B^B$ .

### 7.1 Vecteurs propres, valeurs propres et diagonalisation

Les matrices diagonales sont particulièrement faciles à manipuler. Ainsi, si  $T$  est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , on aimerait savoir si on peut trouver une base  $B$  de  $V$  telle que  $[T]_B$  soit diagonale. Si une telle base existe, comment pouvons-nous la trouver ?

**Definition 7.1.1** (application diagonalisable, matrice diagonalisable). On dit qu'une application linéaire  $T \in \mathcal{L}(V)$  est *diagonalisable* s'il existe une base ordonnée  $B$  pour  $V$  telle que  $[T]_B$  est une matrice diagonale. Une matrice  $A \in M_n(F)$  est *diagonalisable* si l'application linéaire  $F^n \rightarrow F^n$ ,  $v \mapsto Av$ , est diagonalisable.

**Lemma 7.1.2.** *Supposons  $A \in M_n(F)$ . Si  $A$  est diagonalisable, alors toute matrice semblable à  $A$  est diagonalisable. De plus,  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.*

*Démonstration.* Cela découle de la discussion dans la section 4.2, où nous avons vu que si  $T$  est l'application linéaire

$$T: F^n \rightarrow F^n, \quad v \mapsto Av,$$

alors les matrices  $[T]_B$  pour  $T$ , pour les bases ordonnées  $B$ , sont précisément les matrices semblables à  $A$ . (En particulier,  $A$  est la matrice pour  $T$  dans la base standard.)  $\square$

**Definition 7.1.3** (Vecteur propre, valeur propre). Supposons  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Un vecteur non nul  $v \in V$  est appelé un *vecteur propre* de  $T$  s'il existe un scalaire  $\lambda \in F$  tel que

$$Tv = \lambda v.$$

Le scalaire  $\lambda$  est appelé la *valeur propre* correspondant au vecteur propre  $v$ .

Si  $A \in M_n(F)$ , un vecteur non nul  $v \in F^n$  est appelé un *vecteur propre* de  $A$  si

$$Av = \lambda v.$$

Le scalaire  $\lambda$  est appelé la *valeur propre* correspondant au vecteur propre  $v$ . Notez que si nous considérons  $A$  comme une application linéaire  $F^n \rightarrow F^n$ ,  $v \mapsto Av$ , alors cette définition coïncide avec la précédente.

**Theorem 7.1.4.** *Supposons que  $V$  est de dimension finie.*

- (a) *Une application linéaire  $T \in \mathcal{L}(V)$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $T$ .*
- (b) *Si  $T \in \mathcal{L}(V)$  est diagonalisable et  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est une base ordonnée de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $T$ , alors  $[T]_B$  est une matrice diagonale, et sa  $j$ -ième entrée diagonale est la valeur propre  $\lambda_j$  correspondant à  $v_j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .*
- (c) *Une matrice  $A \in M_n(F)$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $F^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .*
- (d) *Supposons que  $A \in M_n(F)$  est diagonalisable et que  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est une base ordonnée de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $A$ . Soit*

$$P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$$

*soit la matrice dont la  $i$ -ème colonne est  $v_i$ . Alors  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale.*

*Démonstration.* Supposons que  $T$  est diagonalisable. Alors il existe une base ordonnée  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  telle que  $[T]_B$  soit diagonale. Soit  $\lambda_j$  la  $j$ -ième entrée diagonale de  $[T]_B$ . Alors, pour  $j = 1, \dots, n$ , nous avons

$$Tv_j = C_B^{-1}[T]_B C_B v_j = C_B^{-1}[T]_B e_j = C_B^{-1} \lambda_j e_j = \lambda_j v_j.$$

Ainsi  $v_j$  est un vecteur propre avec la valeur propre correspondante  $\lambda_j$ . Donc  $B$  est une base de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $T$ . Cela prouve une implication dans la partie (a).

Supposons maintenant que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  soit une base de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $T$ . Alors, pour  $j = 1, \dots, n$ ,

$$Tv_j = \lambda_j v_j,$$

où  $\lambda_j$  est la valeur propre correspondant à  $v_j$ . Ainsi  $[T]_B$  est une matrice diagonale, et sa  $j$ -ième entrée diagonale est  $\lambda_j$ . Cela prouve la partie (b) et l'implication inverse dans la partie (a).

La partie (c) découle immédiatement de (a).

Pour prouver la partie (d), supposons que  $A \in M_n(F)$  est diagonalisable et que  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est une base ordonnée de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $A$ . On définit

$$T: F^n \rightarrow F^n, \quad Tv = Av.$$

Par la partie (b),  $T$  est diagonalisable et  $[T]_B$  est diagonal. Soit  $D = \{e_1, \dots, e_n\}$  la base standard de  $F^n$ . Par notre discussion du changement de bases dans la Section 4.2, nous avons

$$[T]_B = P^{-1}[T]_D P = P^{-1}AP. \quad \square$$

*Exemple 7.1.5.* Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2v_1.$$

Ainsi  $v_1$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_1 = -2$ . De la même manière,

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 5v_2.$$

Ainsi  $v_2$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre 5. Puisque l'ensemble  $B = \{v_1, v_2\}$  est linéairement indépendant (aucun des vecteur n'est multiple de l'autre), c'est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $A$  est diagonalisable et

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Exemple 7.1.6.* Rappelons que  $C^\infty(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel de toutes les fonctions infiniment différentiables  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Considérez l'application linéaire

$$T: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad Tf = f'.$$

Soit  $c \in \mathbb{R}$  et définissons  $f(x) = ce^{\lambda x}$ . Puis  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et

$$Tf = \lambda f.$$

Donc  $f$  est un vecteur propre pour  $T$  avec la valeur propre  $\lambda$ . Ainsi, les applications linéaires sur des espaces vectoriels de dimension infinie peuvent également avoir des vecteurs propres.

**Definition 7.1.7** (Espace propre). Pour  $\lambda \in F$  et  $T \in \mathcal{L}(V)$ , nous définissons

$$E_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}.$$

Alors  $\lambda$  est une valeur propre si et seulement si  $E_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre, alors  $E_\lambda$  est appelé l'*espace propre* de  $T$  correspondant à  $\lambda$ . La preuve que  $E_\lambda$  est un sous-espace de  $V$  est laissé en exercice (Exercice 7.1.1). Notez que  $E_\lambda$  est l'union de l'ensemble de tous les vecteurs propres correspondant à  $\lambda$  et  $\{\mathbf{0}\}$ . Le vecteur zéro n'est jamais un vecteur propre (par définition), mais il est contenu dans n'importe quel espace propre.

*Exemple 7.1.8.* Considérez  $A$  comme dans l'exemple 7.1.5. Nous savons que  $-2$  et  $5$  sont des valeurs propres de  $A$ . Alors  $E_{-2}$  est constitué de tous les vecteurs  $v \in \mathbb{R}^2$  tels que  $Av = -2v$ .

$$Av = -2v \iff (A + 2I)v = 0.$$

Dans MAT 1741, vous avez appris à résoudre des équations matricielles. En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve que

$$E_{-2} = \text{Span} \{v_1\}.$$

De même, nous constatons que

$$E_5 = \text{Span} \{v_2\}.$$

**Proposition 7.1.9.** *Supposons  $A \in M_n(F)$ . Un scalaire  $\lambda \in F$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A - \lambda I) = 0$ .*

*Démonstration.* Pour  $\lambda \in F$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff Av = \lambda v \text{ pour certains } v \neq 0 \\ &\iff (A - \lambda I)v = 0 \text{ pour certains } v \neq 0 \\ &\iff A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Le polynôme  $\det(A - xI)$  est appelé le *polynôme caractéristique* de  $A$ . Donc la Proposition 7.1.9 dit que les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique de  $A$ . Notez que le degré du polynôme caractéristique de  $A \in M_n(F)$  est  $n$ .

Si  $P$  est inversible, alors

$$\begin{aligned} \det(A - xI) &= \det(P^{-1}) \det(A - xI) \det(P) && (\text{depuis } \det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}) \\ &= \det(P^{-1}(A - xI)P) \\ &= \det(P^{-1}AP - xI). \end{aligned}$$

Par conséquent, des matrices similaires ont le même polynôme caractéristique. Rappelez-vous de la section 4.2 que si  $T \in \mathcal{L}(V)$  et  $B, D$  sont la base de  $V$ , alors  $[T]_B$  et  $[T]_D$  sont similaires. Par conséquent, nous pouvons définir le *polynôme caractéristique* de  $T$  comme étant le polynôme caractéristique de la matrice  $[T]_B$ , et cette définition est indépendante du choix de la base  $B$ . Notez que le degré du polynôme caractéristique de  $T$  est la dimension de  $V$ .

*Exemple 7.1.10.* Supposer

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(F).$$

Alors le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1.$$

(a) Si  $F = \mathbb{R}$ , alors il n'y a pas de zéros. Ainsi,  $A$  n'a pas de valeurs propres, et donc pas de vecteurs propres. Donc  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Supposons maintenant  $F = \mathbb{C}$ . Alors les zéros du polynôme caractéristique sont

$$\lambda_1 = i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i.$$

Pour trouver l'espace propre correspondant à la valeur propre  $\lambda$ , nous devons résoudre le système

$$(A - \lambda I)x = \mathbf{0}.$$

Lorsque  $\lambda = \lambda_1 = i$ , on trouve

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'espace des solutions pour ce système est

$$E_i = \left\{ \begin{bmatrix} iz \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De même, nous constatons que

$$E_{-i} = \left\{ \begin{bmatrix} -iz \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque  $\{(i, 1), (-i, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{C}^2$ , la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

(c) Supposons maintenant  $F = \mathbb{F}_2$ . Alors  $\lambda_1 = 1$  est la seule racine du polynôme caractéristique, donc la seule valeur propre. Pour trouver l'espace propre correspondant, on résout

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et on trouve

$$E_1 = \text{Span}_{\mathbb{F}_2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il n'est donc pas possible de trouver une base constituée de vecteurs propres. Donc  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{F}_2$ .

## Exercices.

7.1.1. Supposons que  $\lambda \in F$  et  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Montrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace de  $V$ .

7.1.2. Rappelons que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Définissons

$$T: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (Tf)(x) = f(-x), \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Montrez que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1}$ . *Indice* : Regardez Exercice 1.5.10.

7.1.3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T \in \mathcal{L}(V)$ , et soit  $E_\lambda$  l'espace propre correspondant. Montrez que si  $S \in \mathcal{L}(V)$  et  $ST = TS$ , alors  $S(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$ .

7.1.4. Supposons que  $V$  est de dimension finie et que  $T \in \mathcal{L}(V)$  est diagonalisable. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres distinctes de  $T$ .

(a) Prouver que  $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$ .

(b) Supposons  $S \in \mathcal{L}(V)$ . Prouver que  $ST = TS$  si et seulement si  $S(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

7.1.5 ([Ber14, Ex. 8.2.6]). Soit  $T \in \mathcal{L}(V)$  une application linéaire tel que  $V$  a une base  $v_1, \dots, v_n$  constituée de vecteurs propres pour  $T$ , avec des valeurs propres correspondantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . (Nous ne supposons pas que les  $\lambda_i$  sont distincts.) Démontrer que chaque valeur propre de  $T$  est égale à l'une des  $\lambda_i$ . *Indice* : Si  $Tv = \lambda v$ , exprimez  $v$  comme une combinaison linéaire de  $v_i$ , puis appliquez  $T$ .

## 7.2 Critères de diagonalisation

Dans cette section, nous étudions la diagonalisation plus en détail et donnons un test de diagonalisabilité. Dans toute cette section, l'espace vectoriel  $V$  est de dimension finie.

**Lemma 7.2.1.** *Supposons  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Si  $v_1, \dots, v_k$  sont des vecteurs propres de  $T$  correspondant à des valeurs propres distinctes, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.*

*Démonstration.* Nous prouvons le résultat par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 1$ , alors  $\{v_1\}$  est linéairement indépendant puisque  $v_1 \neq 0$ .

Supposons  $k \geq 2$  et que le théorème est valable pour  $k-1$  vecteurs propres. Soit  $v_1, \dots, v_k$  des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes et supposons

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

En appliquant l'application  $T - \lambda_k I$  aux deux côtés, on obtient

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, les vecteurs  $v_1, \dots, v_{k-1}$  sont linéairement indépendants. Ainsi

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \dots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Puisque les  $\lambda_i$  sont tous distincts par hypothèse, nous avons  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ . Ainsi

$$a_1 = \dots = a_{k-1} = 0.$$

Alors (7.1) donne  $a_k v_k = \mathbf{0}$ . Puisque  $v_k \neq 0$ , nous avons  $a_k = 0$ . Ainsi les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  sont linéairement indépendants, complétant la preuve de l'étape de récurrence.  $\square$

**Corollary 7.2.2.** *Si une application linéaire  $T$  sur un espace vectoriel de dimension  $n$  a  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $T$  est diagonalisable.*

*Démonstration.* Soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs propres de  $T$  correspondant aux valeurs propres distinctes de  $n$ . Alors, d'après le lemme 7.2.1, ces vecteurs sont linéairement indépendants. Puisqu'il y en a  $n$ , ils forment une base.  $\square$

**Definition 7.2.3** (Multiplicité algébrique). Soit  $\lambda$  une valeur propre d'une matrice  $A$  (ou une application linéaire  $T$ ), et soit  $f(x)$  le polynôme caractéristique de  $A$  (respectivement, de  $T$ ). La *multiplicité algébrique* de  $\lambda$  est le plus grand entier strictement positif  $m_\lambda$  tel que  $(x - \lambda)^{m_\lambda}$  soit un facteur de  $f(x)$ , c'est-à-dire tel que  $f(x) = (x - \lambda)^{m_\lambda} g(x)$  pour un certain polynôme  $g(x)$ .

**Definition 7.2.4** (Multiplicité géométrique). Soit  $\lambda$  une valeur propre d'une matrice  $A$  (ou une application linéaire  $T$ ). La *multiplicité géométrique* de  $\lambda$  est  $\dim E_\lambda$ .

**Theorem 7.2.5.** *Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T \in \mathcal{L}(V)$  de multiplicité algébrique  $m_\lambda$ . Alors*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$



*Démonstration.* Choisissez une base  $\{v_1, \dots, v_p\}$  pour  $E_\lambda$  et étendez-la en une base

$$B = \{v_1, \dots, v_p, \dots, v_n\}$$

de  $V$ . Soit  $A = [T]_B$ . Depuis  $Av_i = \lambda v_i$  pour  $i = 1, \dots, p$ , on voit que  $A$  est sous forme de bloc

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$f(x) = \det(A - xI_n) = \det((\lambda - x)I_p) \det(C - xI_{n-p}) = (\lambda - x)^p g(x),$$

où  $g(x) = \det(C - xI_{n-p})$ . Ainsi  $(\lambda - x)^p$  est un facteur de  $f(x)$ , et donc  $\dim E_\lambda = p \leq m_\lambda$ .  $\square$

*Exemple 7.2.6.* Soit  $F = \mathbb{R}$ , et considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix} = -x^3.$$

Ainsi  $A$  n'a qu'une seule valeur propre  $\lambda = 0$ , de multiplicité algébrique 3. Pour trouver  $E_0$  on résout

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \mathbf{0}$$

et on trouve l'ensemble de solutions

$$E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc  $\dim E_0 = 1 < 3$ . Il n'y a donc aucune base de  $\mathbb{R}^3$  constitué de vecteurs propres, donc  $T$  n'est pas diagonalisable.

**Lemma 7.2.7.** *Supposons que  $T \in \mathcal{L}(V)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , soit  $u_i \in E_{\lambda_i}$ . Si  $u_1 + \dots + u_k = \mathbf{0}$ , alors  $u_i = \mathbf{0}$  pour tous les  $i = 1, \dots, k$ .*

*Démonstration.* Si l'un des  $u_i$  est différent de zéro, alors  $u_1 + \dots + u_k$  ne peut pas être nul par Lemme 7.2.1.  $\square$

**Lemma 7.2.8.** *Supposons que  $T \in \mathcal{L}(V)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont des valeurs propres distinctes de  $T$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , soit  $S_i$  un sous-ensemble linéairement indépendant de  $E_{\lambda_i}$ . Alors  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  est un sous-ensemble linéairement indépendant de  $V$ .*

*Démonstration.* Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , laissez  $S_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}\}$ . Supposons que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} v_{i,j} = \mathbf{0}$$

pour certains  $a_{i,j} \in F$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , soit

$$w_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} v_{i,j}.$$

alors  $w_1 + \dots + w_k = \mathbf{0}$  et  $w_i \in E_{\lambda_i}$ . Par le lemme 7.2.7, nous avons  $w_i = \mathbf{0}$  pour tout  $i$ . Puisque chaque  $S_i$  est linéairement indépendant, nous avons  $a_{i,j} = 0$  pour tous les  $j$ .  $\square$

**Theorem 7.2.9** (teste de diagonalisabilité). *Supposons que  $T$  est une application linéaire sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  sur un corps  $F$ . Alors  $T$  est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) *Le polynôme caractéristique de  $T$  est un produit de facteurs linéaires*

$$c(\lambda_1 - x)^{m_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - x)^{m_{\lambda_k}},$$

*où  $c \in F$ ,  $c \neq 0$ , les  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont des racines distinctes (valeurs propres) et  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_k}$  sont les multiplicités algébriques respectives. (Notez que  $m_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_k} = n$ .)*

(b) *Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $T$ , nous avons  $m_{\lambda} + \text{rang}(T - \lambda I) = n$  (De façon équivalente,  $\dim E_{\lambda} = m_{\lambda}$ ).*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  : supposons que  $T$  est diagonalisable. Alors il existe une base ordonnée  $B$  de  $V$  telle que  $D := [T]_B$  soit diagonale. Par Théorème 7.1.4, les entrées diagonales de  $D$  sont les valeurs propres de  $T$  correspondant aux vecteurs propres dans la base  $B$ . (Ces valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes.) Alors le polynôme caractéristique de  $T$  est

$$\det(D - xI_n) = (\lambda_1 - x)^{m_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - x)^{m_{\lambda_k}},$$

où  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sont les valeurs propres distinctes  $m_{\lambda_i}$  est le nombre d'occurrences de  $\lambda_i$  sur la diagonale de  $D$ .

Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , nous avons des éléments  $m_{\lambda_i}$  de la base  $B$  qui sont des vecteurs propres correspondant à  $\lambda_i$ . Puisque ces vecteurs sont linéairement indépendants, nous avons  $\dim E_{\lambda_i} \geq m_{\lambda_i}$ . Par théorème 7.2.5, nous avons  $\dim E_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i}$ . Ainsi  $\dim E_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$  pour chaque  $i = 1, \dots, k$ .

Enfin, pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{rang}(T - \lambda_i I_n) &= \dim \text{Im}(T - \lambda_i I_n) \\ &= n - \dim \ker(T - \lambda_i I_n) && \text{(par le théorème du rang)} \\ &= n - \dim E_{\lambda_i} \\ &= n - m_{\lambda_i}. && \square \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  : Supposons que les deux conditions soient remplies. Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , choisissez une base  $B_i$  de  $E_{\lambda_i}$ . Alors  $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$  est linéairement indépendant par Lemme 7.2.8. De plus,  $B$  a des éléments  $n$ . Ainsi  $B$  est une base de  $V$  constituée de vecteurs propres. Donc, d'après le théorème 7.1.4,  $T$  est diagonalisable.

Un corps  $F$  est dit *algébriquement clos* si chaque polynôme non constant dans  $\mathcal{P}(F)$  se factorise en produit de polynômes linéaires (c'est-à-dire de degré un) dans  $\mathcal{P}(F)$ . Ainsi, si on travaille sur un corps clos, la condition (a) du Théorème 7.2.9 est toujours satisfaite. Ainsi,  $T$  est diagonalisable si et seulement si la condition (b) est satisfaite.

Le corps  $\mathbb{R}$  n'est pas algébriquement clos. Par exemple,  $x^2 + 1$  ne se factorise pas en tant que produit de polynômes linéaires sur  $\mathbb{R}$ . Cependant,  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos. C'est le *fondamental de l'algèbre*, dont la démonstration dépasse le cadre de ce cours.

## Exercices.

7.2.1. Supposons que le polynôme caractéristique de  $T \in \mathcal{L}(V)$  soit  $-x^3 + 3x^2 - 2x$ . Montrer que  $T$  est diagonalisable.

7.2.2 ([Ber14, Ex. 8.3.3]). Supposons que  $T \in \mathcal{L}(V)$ ,  $M$  est un sous-espace non nul de  $V$  tel que  $T(M) \subseteq M$ , et  $R = T|_M: M \rightarrow M$  est la restriction de  $T$  à  $M$ . Soit  $f_T$  et  $f_R$  les polynômes caractéristiques de  $T$  et  $R$ , respectivement. Montrez que  $f_R$  divise  $f_T$ , c'est-à-dire  $f_T = f_R g$  pour un certain polynôme  $g$ . *Indice* : Soit  $v_1, \dots, v_m$  une base de  $M$  et considérons la matrice de  $T$  relative à une base  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  de  $V$ .

7.2.3. Supposons  $a, b \in F$ . Montrer que la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

est diagonalisable si et seulement si  $b = 0$ .

7.2.4. Si  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \in \mathcal{P}(F)$  et  $A$  est une matrice carrée, nous définissons

$$f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_mA^m.$$

- (a) Si  $A, P \in M_n(F)$ , avec  $P$  inversible, et  $f \in \mathcal{P}(F)$ , prouver que  $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ .
- (b) Si  $D \in M_n(F)$  est diagonale avec des entrées diagonales  $d_1, \dots, d_n$ , prouver que  $f(D)$  est la matrice diagonale avec des entrées  $f(d_1), \dots, f(d_n)$ .
- (c) Supposons que  $A$  est une matrice diagonalisable de polynôme caractéristique  $f$ . Prouver que  $f(A)$  est la matrice nulle.

## 7.3 Opérateurs auto-adjoints et matrices symétriques

Dans cette section et la suivante, nous discutons de la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints et des matrices symétriques. En particulier, nous verrons que *tout* les opérateurs auto-adjoints et les matrices symétriques sont diagonalisables. Tout au long de cette section,  $V$  est un espace pré-euclidien de dimension finie.

**Definition 7.3.1** (Auto-adjoint). Une application linéaire  $T: V \rightarrow V$  est *auto-adjointe* si

$$T = T^*.$$

Rappelons qu'une matrice  $A$  est *symétrique* si  $A = A^t$ .

*Exemple 7.3.2.* Considérez  $\mathbb{R}^n$  avec le produit scalaire standard et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On a alors l'application linéaire correspondante

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(v) = Av, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Nous avons vu dans le Théorème 6.3.5 que l'adjoint est

$$T^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T^*(v) = A^t v, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi  $T$  est auto-adjoint si et seulement si  $A = A^t$ , c'est-à-dire que  $A$  est symétrique.

Le lemme suivant généralise Exemple 7.3.2.

**Lemma 7.3.3.** *Si  $B$  est une base orthonormée pour  $V$ , et  $C_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'isomorphisme de coordonnées, alors*

- (a)  $\langle v, w \rangle = C_B(v) \cdot C_B(w)$  (produit scalaire) pour tout  $v, w \in V$ , et
- (b) si  $T: V \rightarrow V$  est linéaire, alors  $[T^*]_B = ([T]_B)^t$ . Donc  $T$  est auto-adjoint si et seulement si  $[T]_B$  est symétrique.

*Démonstration.* Soit  $B = \{w_1, \dots, w_n\}$  et  $v, w \in V$ . On pose

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad C_B(w) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i w_i, \sum_{j=1}^n b_j w_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle w_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= C_B(v) \cdot C_B(w). \end{aligned}$$

Il reste à prouver la deuxième affirmation. Pour tout  $v, w \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Tv, w \rangle &= C_B(Tv) \cdot C_B(w) \\
&= ([T]_B C_B(v)) \cdot C_B(w) && \text{(depuis } [T]_B = C_B T C_B^{-1} \text{)} \\
&= ([T]_B C_B(v))^t C_B(w) \\
&= C_B(v)^t ([T]_B)^t C_B(w) \\
&= C_B(v) \cdot (([T]_B)^t C_B(w)).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$C_B(v) \cdot (([T]_B)^t C_B(w)) = \langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle = C_B(v) \cdot C_B(T^*w).$$

Puisque cela vaut pour tout  $v$ , nous avons

$$x \cdot (([T]_B)^t C_B(w)) = x \cdot C_B(T^*w) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall w \in V.$$

Par conséquent

$$([T]_B)^t C_B(w) = C_B(T^*w) \quad \forall w \in V,$$

et donc

$$([T]_B)^t C_B = C_B T^*,$$

ce qui implique

$$([T]_B)^t = [T^*]_B. \quad \square$$

**Corollary 7.3.4.** *Si  $D$  est une base orthonormée de  $V$ , et  $\{y_1, \dots, y_n\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  (avec le produit scalaire), alors  $B = \{C_D^{-1}(y_1), \dots, C_D^{-1}(y_n)\}$  est aussi une base orthonormée de  $V$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 7.3.3(a), on a

$$\langle C_D^{-1}(y_i), C_D^{-1}(y_j) \rangle = y_i \cdot y_j = \delta_{ij}. \quad \square$$

**Lemma 7.3.5.** *Supposons que  $T$  est un opérateur auto-adjoint. Si  $v$  et  $w$  sont des vecteurs propres de  $T$  correspondant à des valeurs propres distinctes, alors  $v \perp w$ . En particulier, si  $v$  et  $w$  sont des vecteurs propres d'une matrice symétrique  $A$  correspondant à des valeurs propres distinctes, alors  $v \perp w$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $v$  et  $w$  correspondent respectivement aux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ , et que  $\lambda \neq \mu$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle \\
&= \langle Tv, w \rangle \\
&= \langle v, T^*w \rangle && \text{(par 6.2)} \\
&= \langle v, Tw \rangle \\
&= \langle v, \mu w \rangle \\
&= \mu \langle v, w \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(\lambda - \mu)\langle v, w \rangle = 0.$$

Depuis  $\lambda \neq \mu$ , cela implique que  $\langle v, w \rangle = 0$ .

La deuxième assertion suit en considérant la transformation linéaire  $v \mapsto Av$ .  $\square$

## Exercices.

7.3.1 ([Ber14, Ex. 12.4.1]). Soit  $U$  un sous-espace d'un espace pré-euclidien de dimension finie  $V$ , et soit  $P = \text{proj}_U: V \rightarrow V$  la projection orthogonale sur  $U$  (voir Corollaire 6.2.13). Montrez que  $P^* = P = P^2$ .

7.3.2 ([Ber14, Ex. 12.4.2]). Soit  $V$  un espace pré-euclidien de dimension finie et supposons que  $T \in \mathcal{L}(V)$  satisfait  $T^2 = T$  et  $T^* = T$ . Définissez  $U = T(V)$ . Démontrez les affirmations suivantes :

- (a)  $U = \{v \in V : Tv = v\} = \ker(I - T)$ .
- (b)  $U^\perp = \ker T$ .
- (c)  $T = \text{proj}_U$ .

## 7.4 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints

Nous discutons maintenant de la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints et des matrices symétriques. Tout au long de cette section,  $V$  est un espace de pré-euclidien de dimension finie.

Rappelons que pour un nombre complexe  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , son *conjugué* est

$$\bar{z} = a - bi.$$

Sa *norme* est

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

nous définissons sa *trans-conjugué*

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{a_{1,1}} & \overline{a_{2,1}} & \cdots & \overline{a_{m,1}} \\ \overline{a_{1,2}} & \overline{a_{2,2}} & \cdots & \overline{a_{m,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \overline{a_{2,n}} & \cdots & \overline{a_{m,n}} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{C}).$$

Notez que

$$A^\dagger = A^t \quad \text{si } A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

Nous avons

$$v^\dagger v = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i a_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0.$$

(Ici, nous identifions une matrice  $1 \times 1$  avec son unique coefficient.) Il s'ensuit que

$$v^\dagger v = 0 \iff v = \mathbf{0}.$$

**Proposition 7.4.1.** *Toute matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  possède un vecteur propre réel  $v \in \mathbb{R}^n$  correspondant à une valeur propre réelle.*

*Démonstration.* Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique et considérons le polynôme caractéristique

$$f(x) = \det(A - xI).$$

Nous pouvons voir  $f(x)$  comme un élément de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ . Par le théorème fondamental de l'algèbre,  $f(x)$  a une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Donc, si nous considérons  $A$  comme un élément de  $M_n(\mathbb{C})$ , elle a un vecteur propre  $v \in \mathbb{C}^n$  correspondant à  $\lambda$ . Donc nous avons

$$\lambda v^\dagger v = v^\dagger(\lambda v) = v^\dagger Av.$$

En prenant la transposée conjuguée des deux côtés, on obtient

$$\bar{\lambda} v^\dagger v = (v^\dagger Av)^\dagger = v^\dagger A^\dagger v = v^\dagger Av = v^\dagger(\lambda v) = \lambda v^\dagger v,$$

où nous avons utilisé le fait que  $A^\dagger = A^t = A$  puisque  $A$  est symétrique réel. Alors

$$(\lambda - \bar{\lambda})v^\dagger v = \mathbf{0}.$$

Comme  $v \neq \mathbf{0}$ , il s'ensuit que  $\bar{\lambda} = \lambda$ , et donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Il reste à montrer que  $Ax = \lambda x$  pour certains  $x$  non nuls dans  $\mathbb{R}^n$  (par opposition à  $\mathbb{C}^n$ ). Nous pouvons écrire

$$v = (a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) = \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_u + i \underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_w,$$

où  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ . Nous avons donc

$$\lambda u + i\lambda w = \lambda v = Av = A(u + iw) = Au + iAw.$$

En comparant les parties réelles et imaginaires, nous voyons que  $Au = \lambda u$  et  $Aw = \lambda w$ , puisque  $v \neq \mathbf{0}$ , au moins un parmi  $u$  et  $w$  est différent de zéro. Donc au moins l'un d'entre eux est un vecteur propre réel correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .  $\square$

**Corollaire 7.4.2.** *Chaque opérateur linéaire auto-adjoint sur  $V$  a une valeur propre réelle.*

*Démonstration.* Choisissez une base orthonormée  $B$  de  $V$ . Alors, d'après le lemme 7.3.3, la matrice  $[T]_B$  est symétrique. D'après le lemme 7.4.1,  $[T]_B$  a une valeur propre  $\lambda$  correspondant au vecteur propre  $v$ . Alors

$$TC_B^{-1}(v) = C_B^{-1}[T]_B v = \lambda C_B^{-1}(v).$$

Donc  $C_B^{-1}(v)$  est un vecteur propre de  $T$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .  $\square$

**Theorem 7.4.3.** *Supposons que  $V$  est un espace pré-euclidien de dimension finie. Un endomorphisme  $T: V \rightarrow V$  est auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée de  $V$  constituée de vecteurs propres de  $T$ . De manière équivalente (par Théorème 7.1.4)  $T$  est auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée  $B$  telle que  $[T]_B$  soit diagonale.*

*Démonstration.* La partie "si" découle du lemme 7.3.3 et du fait que les matrices diagonales sont symétriques. Il reste donc à prouver la partie "seulement si".

Supposons un instant que l'on puisse trouver une base orthonormée  $B$  de  $V$  telle que  $[T]_B$  soit triangulaire supérieur. D'après le lemme 7.3.3,  $[T]_B$  est aussi symétrique. Donc  $[T]_B$  doit en fait être diagonal. Il suffit donc de trouver une base orthonormée  $B$  de  $V$  telle que  $[T]_B$  soit triangulaire supérieur. Nous le faisons par récurrence sur  $n = \dim V$ .

Supposons d'abord  $n = 1$  et choisissons une base  $\{v_1\}$  de  $V$ . Nous devons avoir  $Tv_1 = \lambda v_1$  pour un certain  $\lambda$ . Donc  $v_1$  est un vecteur propre, et

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\}$$

est une base orthonormée de  $V$  constituée de vecteurs propres. Puisque la matrice pour  $T$  dans cette base est  $1 \times 1$ , elle est clairement triangulaire supérieure.

Supposons maintenant  $n \geq 2$  et que le résultat soit valable pour les espaces vectoriels de dimension  $n - 1$ . Par corollaire 7.4.2,  $T$  possède un vecteur propre réel  $v_1$  correspondant à une valeur propre réelle  $\lambda_1$ . Soit  $W = \{v_1\}^\perp$ , et soit  $v_2, \dots, v_n$  une base orthonormée pour  $W$ . Alors  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  est une base orthonormée pour  $V$  et

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A$  définit une transformation linéaire

$$W \rightarrow W, \quad v \mapsto Av.$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée  $\{v_2, \dots, v_n\}$  de  $W$  par rapport à laquelle la matrice de cette application est triangulaire supérieure. Puisque  $[T]_B$  est triangulaire supérieur quand  $A$  l'est, nous avons terminé.  $\square$

**Corollaire 7.4.4.** *Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique si et seulement s'il existe une matrice orthogonale  $C$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  $C^t A C = D$ .*



*Démonstration.* Pour la partie “si” notez que si  $C$  est orthogonal et  $D$  est diagonal avec  $C^t AC = D$ , alors  $A = CDC^t$  et ainsi

$$A^t = (CDC^t)^t = CD^t C^t = CDC^t = A.$$

Pour prouver le “seulement si”, supposons que  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique. On pose

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Tv = Av, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Puis  $A = [T]_B$ , où  $B$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . (Donc  $B$  est une base orthonormée.) Puisque  $A$  est symétrique, le lemme 7.3.3 implique que  $T$  est auto-adjoint. Ainsi, d’après le théorème 7.4.3, il existe une base orthonormée  $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $D = [T]_{B'}$  soit diagonale. Soit

$$C = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

la matrice de changement base de  $B$  à  $B'$ . Puisque les colonnes de  $C$  forment une base orthonormée, la matrice  $C$  est orthogonale par le lemme 6.2.7. Ainsi  $C^t C = I$ , et donc  $C^{-1} = C^t$ . Alors, comme dans la Section 4.2, on a

$$D = [T]_{B'} = C^{-1}[T]_B C = C^t AC. \quad \square$$

On dit qu’on a *diagonalisé orthogonalement* une matrice  $A$  si on a trouvé une matrice orthogonale  $C$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  $C^t AC = D$ .

*Exemple 7.4.5.* Considérez la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trouvons une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $C$  telles que  $C^t AC = D$ .

On trouve d’abord les valeurs propres de  $A$ . Nous fixons

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(-1 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 21 = (\lambda - 7)(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres sont 7 et  $-3$ . Pour la valeur propre  $\lambda = -3$ , on trouve l’espace propre  $E_{-3}$  en résolvant

$$(A - \lambda I)x = \mathbf{0} \implies (A + 3I)x = \mathbf{0}.$$

Nous le faisons en réduisant la ligne

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

et donc

$$E_{-3} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque nous voulons que  $C$  soit une matrice orthogonale, ses colonnes doivent former une base orthonormée (de vecteurs propres). Nous avons donc besoin d'un vecteur unité dans  $E_{-1}$ . Prendre

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, nous pourrions répéter ce processus avec la valeur propre 7. Cependant, nous pouvons nous épargner quelques efforts en utilisant le théorème 7.4.3 pour conclure que  $A$  (qui est symétrique) doit avoir une base orthonormée. Alors on prend

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(nous utilisons ici le fait que  $(-b, a)$  est orthogonal à  $(a, b)$ ). Alors  $\{v_1, v_2\}$  est une base orthonormée de vecteurs propres,

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale, et

$$C^t A C = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

*Exemple 7.4.6.* Soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $Tv = Av$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$ , où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trouvons une matrice orthogonale  $C$  telle que  $C^t A C = D$  soit diagonale.

On trouve d'abord les valeurs propres de  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{exercice}}{=} -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8).$$

Les valeurs propres sont donc  $-1$  (avec multiplicité algébrique 2) et  $8$  (avec multiplicité algébrique 1). À présent,

$$E_{-1} = \text{Ker}(A + I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nous convertissons la base de l'espace propre en une base orthogonale en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ou (puisque nous pouvons multiplier chaque vecteur par un scalaire)

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

De la même manière,

$$E_8 = \text{Ker}(A - 8I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de  $E_8$ .

Nous formons maintenant la matrice  $C$  que nous recherchons en utilisant les vecteurs de base que nous avons trouvés (après avoir divisé par leur norme afin d'en faire des vecteurs unité) comme colonnes. Ainsi

$$C = \begin{bmatrix} -\sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ 2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 & 1/3 \\ 0 & -\sqrt{5}/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

et

$$C^t A C = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Remark 7.4.7.* La seule chose nouvelle ici (par rapport à ce que vous avez fait dans MAT 1741) est que nous avons affaire à des matrices symétriques et que nous ne recherchons pas seulement *n'importe quel* base de vecteurs propres, mais plutôt une *orthonormé* base de vecteurs propres. Ainsi, dans les espaces propres de dimension supérieure à 1, nous devons utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de l'espace propre. Les vecteurs propres correspondant à différentes valeurs propres sont *automatiquement* orthogonal par le lemme 7.3.5.

## Exercices.

7.4.1 ([Tre, Ex. 6.2.4]). Diagonaliser orthogonalement la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trouver toutes les racines carrées de  $A$ , c'est-à-dire trouver toutes les matrices  $B$  telles que  $B^2 = A$ .

7.4.2 ([Tre, Ex. 6.2.4]). Diagonaliser orthogonalement la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Parmi toutes les racines carrées de  $A$ , trouvez-en une qui a des valeurs propres strictement positif.

7.4.3 ([Tre, Ex. 6.2.8]). Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Démontrez les affirmations suivantes suivantes :

- (a)  $A^t A$  est symétrique.
- (b) Toutes les valeurs propres de  $A^t A$  sont positive ou nul.
- (c)  $A^t A + I$  est inversible.

## 7.5 Transformation euclidienne

Rappelons la définition 6.3.6,  $T \in \mathcal{L}(V)$  est une isométrie si elle préserve le produit scalaire. Dans cette dernière section, nous discutons d'un type de application similaire mais plus général appelé transformation euclidienne (ou parfois mouvement rigide). Tout au long de cette section,  $V$  est un espace pré-euclidien.

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations équivalentes des isométries.

**Theorem 7.5.1.** *Supposons que  $V$  est de dimension finie et  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $TT^* = T^*T = I$ .
- (b)  $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$  pour tous les  $v, w \in V$ .
- (c) Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base orthonormée pour  $V$ , alors  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  est une base orthonormée.
- (d)  $\|Tv\| = \|v\|$  pour tous les  $v \in V$ .

*Démonstration.* (a)  $\implies$  (b) : Supposons que (a) soit vérifié. Alors, pour  $v, w \in V$ , nous avons

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, T^*Tw \rangle = \langle v, Iw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

(b)  $\implies$  (a) : Supposons que (b) soit vérifié. Alors, pour tout  $v, w \in V$ , on a

$$\langle v, (T^*T - I)w \rangle = \langle v, T^*Tw \rangle - \langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle - \langle v, w \rangle = 0.$$

Ainsi, en prenant  $v = (T^*T - I)w$ , nous voyons que  $(T^*T - I)w = \mathbf{0}$ . Donc  $T^*Tw = Iw = w$  pour tout  $w \in V$ . Donc  $T^*T = I$ .

(b)  $\implies$  (c) : Supposons que (b) soit vérifié et que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  soit une base orthonormée pour  $V$ . Alors

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j},$$

et donc  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  est une base orthonormale.

(c)  $\implies$  (d) : Supposons que (c) soit vérifié et que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  soit une base orthonormée pour  $V$ . Tout  $v \in V$  peut être écrit comme

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Maintenant, nous avons aussi

$$Tv = T \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i T v_i.$$

Par hypothèse,  $\{T v_1, \dots, T v_n\}$  est une base orthonormée. Ainsi

$$\|Tv\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i T v_i, \sum_{j=1}^n a_j T v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle T v_i, T v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

D'où  $\|v\| = \|Tv\|$ .

(d)  $\implies$  (b) : Supposons que (d) soit vérifié. Par l'identité de polarisation (Théorème 6.1.6(c)), pour tout  $v, w \in V$ , on a

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4} (\|Tv + Tw\|^2 - \|Tv - Tw\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|T(v + w)\|^2 - \|T(v - w)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 7.5.2** (Transformation euclidienne). Une fonction  $f: V \rightarrow V$  est appelée une *transformation euclidienne* si

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in V.$$

Si nous définissons la *distance* entre  $x$  et  $y$  comme  $\|x - y\|$ , alors les mouvements rigides sont les applications qui préservent la distance.

*Example 7.5.3.* Toute isométrie  $T: V \rightarrow V$  est une transformation euclidienne puisque

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in V.$$

*Exemple 7.5.4* (Traductions). Une fonction  $\rho: V \rightarrow V$  est appelée une *translation* s'il existe un vecteur  $v \in V$  tel que

$$\rho(u) = u + v \quad \text{pour tous } u \in V.$$

Alors, pour tout  $x, y \in V$ , on a

$$\|\rho(x) - \rho(y)\| = \|x + v - (y + v)\| = \|x - y\|.$$

Les translations sont donc des transformation euclidienne. Cependant, une traduction n'est pas une application linéaire sauf si  $v = \mathbf{0}$  depuis  $\rho(\mathbf{0}) = v$ .

**Lemma 7.5.5.** *Si  $f, g: V \rightarrow V$  sont des transformations euclidiennes, alors la composition  $f \circ g$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Pour tout  $x, y \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(y)\| &= \|f(g(x)) - f(g(y))\| \\ &= \|g(x) - g(y)\| && \text{(puisque } f \text{ est un mouvement rigide)} \\ &= \|x - y\| && \text{(puisque } g \text{ est un mouvement rigide)} \end{aligned}$$

Donc  $f \circ g$  est une transformation euclidienne. □

**Theorem 7.5.6.** *Supposons que  $V$  est de dimension finie et que  $f: V \rightarrow V$  est une transformation euclidienne. Alors il existe un unique opérateur orthogonal  $T \in \mathcal{L}(V)$  et une unique translation  $\rho: V \rightarrow V$  tel que  $f = \rho \circ T$ . En d'autres termes, tout mouvement rigide peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une isométrie suivie d'une translation.*

*Démonstration.* Définir

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V, & T(u) &= f(u) - f(\mathbf{0}), & u &\in V, \\ \rho: V &\rightarrow V, & \rho(u) &= u + f(\mathbf{0}), & u &\in V. \end{aligned}$$

Puis  $f = \rho \circ T$ . Nous allons montrer que  $T$  est une isométrie.

Puisque  $T$  est la composition de  $f$  et la translation par  $-f(\mathbf{0})$ , c'est un mouvement rigide par Lemme 7.5.5. Il est également clair que  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Pour tous les  $u \in V$  nous avons

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \|T(u) - T(\mathbf{0})\| \\ &= \|f(u) - f(\mathbf{0})\| \\ &= \|u - \mathbf{0}\| && \text{(puisque } f \text{ est un mouvement rigide)} \\ &= \|u\|. \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $u, v \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\|^2 &= \langle T(u) - T(v), T(u) - T(v) \rangle \\ &= \|T(u)\|^2 - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \|T(v)\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Puisque  $T$  est un mouvement rigide, nous avons  $\|T(u) - T(v)\|^2 = \|u - v\|^2$ . Ainsi

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour tous } u, v \in V. \quad (7.2)$$

Montrons maintenant que  $T$  est linéaire. Pour  $u, v \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|T(u+v) - T(u) - T(v)\|^2 &= \|T(u+v) - T(u)\|^2 - 2\langle T(u+v) - T(u), T(v) \rangle + \|T(v)\|^2 \\ &= \|u+v-u\|^2 - 2\langle T(u+v), T(v) \rangle + 2\langle T(u), T(v) \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2\|v\|^2 - 2\langle u+v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $T(u+v) = T(u) + T(v)$ . De plus, pour  $v \in V$  et  $c \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|T(cv) - cT(v)\|^2 &= \|T(cv)\|^2 - 2\langle T(cv), cT(v) \rangle + \|cT(v)\|^2 \\ &= \|cv\|^2 - 2c\langle T(cv), T(v) \rangle + c^2\|T(v)\|^2 \\ &= 2c^2\|v\|^2 - 2c\langle cv, v \rangle \\ &= 2c^2\|v\|^2 - 2c^2\|v\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $T(cv) = cT(v)$ . Donc  $T$  est linéaire et, par (7.2), c'est un opérateur orthogonal.

Il reste à prouver l'unicité. Supposons que  $U, T \in \mathcal{L}(V)$  sont orthogonaux,  $u, v \in V$  et

$$f(x) = T(x) + u = U(x) + v \quad \text{pour tous } x \in V.$$

En prenant  $x = \mathbf{0}$ , on obtiens que  $u = v$ . Donc  $T(x) = U(x)$  pour tout  $x \in V$ , et donc  $T = U$ .  $\square$

## Exercises.

7.5.1. Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un opérateur orthogonal, et soit  $A = [T]_B \in M_2(\mathbb{R})$ , où  $B = \{e_1, e_2\}$  est la base standard de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\{Te_1, Te_2\}$  est aussi une base orthonormée pour  $\mathbb{R}^2$  par le théorème 7.5.1. En particulier,  $Te_1$  est un vecteur unité, et il existe donc un angle unique  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tel que  $Te_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

- (a) Trouvez toutes les possibilités pour  $Te_2$ .
- (b) Montrez que l'une des affirmations suivantes est vérifié :
  - (i)  $\det A = 1$  et  $T$  est une rotation.
  - (ii)  $\det A = -1$  et  $T$  est une réflexion sur une ligne à l'origine.
- (c) Démontrer que toute transformation euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  est soit une rotation suivie d'une translation, soit une réflexion sur une ligne passant par l'origine suivie d'une translation.

# Annexe A

## Un avant-goût de l’algèbre abstraite

Dans cette annexe facultative, nous explorons certaines des propriétés que peuvent avoir les opérations binaires sur les ensembles. Nous donnons également la définition précise d’un corps omis dans la Section 1.1. Le point de vue abstrait adopté ici permet de prouver des résultats dans un cadre très général, puis d’obtenir des résultats plus spécifiques dans des cas particuliers. Par exemple, le fait que les inverses additifs dans les corps et les inverses additifs dans les espaces vectoriels soient tous deux uniques découle d’un résultat plus générale sur les inverses dans un monoïde.

### A.1 Opérations sur les ensembles

**Definition A.1.1** (Opération sur un ensemble). Supposons que  $E$  est un ensemble. On dit que  $\star$  est une *opération binaire sur  $E$*  si pour tout  $x, y \in E$ ,  $x \star y$  est un élément bien défini de  $E$ . Une paire  $(E, \star)$ , où  $E$  est un ensemble et  $\star$  est une opération binaire sur  $E$  est appelée un *magma*.

Donc, grosso modo, une opération  $\star$  sur un ensemble  $E$  est une “règle” qui assigne un élément  $x \star y$  de  $E$  à chaque paire d’éléments  $(x, y)$  de  $E$ . Plus précisément,  $\star$  est une application de  $E \times E = \{(x, y) \mid x, y \in E\}$  à  $E$ .

*Remark A.1.2.* Le terme *magma* n’est pas particulièrement connue, même parmi les mathématiciens. Nous l’utiliserons simplement parce qu’il est plus court que “ensemble avec une opération binaire”.

*Examples A.1.3.* (a)  $(\mathbb{Z}, +)$  est un magma.

(b)  $(\mathbb{Z}, -)$  est un magma. Cependant, la soustraction est *n’est pas* une opération sur l’ensemble  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  puisque  $x - y$  n’est pas un élément de  $\mathbb{N}$  pour tout  $x, y \in \mathbb{N}$ . Ainsi,  $(\mathbb{N}, -)$  n’est *pas* un magma.

(c) Si “ $\div$ ” désigne une division ordinaire de nombres, alors  $\div$  n’est pas une opération sur  $\mathbb{R}$  car  $x \div y$  n’est pas défini lorsque  $y = 0$ . Cependant, si nous laissons  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , alors  $(\mathbb{R}^*, \div)$  est un magma.

**Definition A.1.4.** Supposons que  $(E, \star)$  soit un magma.



- (a) On dit que  $\star$  est *commutative* si  $x \star y = y \star x$  pour tout  $x, y \in E$ .  
 (b) On dit que  $\star$  est *associative* si  $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$  pour tout  $x, y, z \in E$ .

*Exemple A.1.5.* Considérons l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$  et l'opération  $\star$  définis par le tableau :

$\star$	1	2	3
1	3	2	3
2	1	1	2
3	2	2	2

Le tableau nous indique que  $1 \star 2 = 2$  et  $2 \star 1 = 1$ . Notez que  $\star$  est en effet une opération sur  $E$ , car elle satisfait à l'exigence de Définition A.1.1. Donc  $(E, \star)$  est un magma. On note que  $1 \star 2 \neq 2 \star 1$ , donc cette opération n'est pas commutative.

- Exemples A.1.6.* (a) Dans le magma  $(\mathbb{R}, +)$ , l'opération est commutative et associative.  
 (b) Dans le magma  $(\mathbb{R}, \cdot)$ , l'opération est commutative et associative.  
 (c) Dans le magma  $(\mathbb{R}, -)$ , l'opération n'est *pas* commutatif et n'est *pas* associatif. Pour voir qu'il n'est pas commutatif, notons que, par exemple,  $3 - 5 \neq 5 - 3$ . Pour prouver qu'il n'est pas associatif, notons que, par exemple,  $(1 - 3) - 5 \neq 1 - (3 - 5)$ .

*Remark A.1.7.* Pour montrer qu'un magma n'est *pas* associatif ou commutatif, il suffit de trouver *un* contre-exemple, mais pour montrer qu'un magma *est* associatif ou commutatif, il faut montrer que la propriété est satisfaite pour *tout* élément — vous *ne pouvez pas* donner juste un exemple particulier. Par exemple, dans Exemple A.1.5, nous avons  $2 \star 3 = 2 = 3 \star 2$  mais  $\star$  n'est pas une opération commutative (comme nous l'avons noté dans l'exemple).

## Exercices.

A.1.1. Soit  $E = \{1, 2, 3\}$  et définissons  $\star$  par la table :

$\star$	1	2	3
1	3	4	3
2	1	1	2
3	2	2	2

Est-ce que  $(E, \star)$  est un magma ? Si oui, est-il commutatif et/ou associatif ?

## A.2 Utilisation de parenthèses

Supposons que  $(E, \star)$  soit un magma. Dans des expressions comme  $a \star (b \star (c \star d))$ , peut-on omettre les parenthèses ? La réponse dépend si  $\star$  est associatif ou non.

Si  $\star$  est une opération associative, nous pouvons omettre toutes les parenthèses. La raison en est que peu importe si par  $a \star b \star c$  nous entendons  $(a \star b) \star c$  ou  $a \star (b \star c)$ , puisque ces deux quantités sont égales. Nous pouvons également écrire des expressions plus longues comme  $a \star b \star c \star d$  sans parenthèses, car les interprétations possibles

$$((a \star b) \star c) \star d, \quad (a \star (b \star c)) \star d, \quad (a \star b) \star (c \star d), \quad a \star ((b \star c) \star d), \quad a \star (b \star (c \star d)),$$

donnent tous le même résultat, il n'y a donc pas d'ambiguïté.

La règle générale est que les parenthèses doivent être utilisées lorsque l'opération n'est pas associative. Il existe une exception à cette règle : avec l'opération non associative de soustraction, les parenthèses peuvent être omises dans certains cas. À savoir, les gens ont adopté la convention selon laquelle dans des expressions telles que  $a - b - c - d$  (sans parenthèses), l'opération la plus à gauche est évaluée en premier. En d'autres termes, la convention dit que  $a - b - c - d$  doit toujours être interprété comme signifiant  $((a - b) - c) - d$ . Donc, si vous voulez écrire  $((a - b) - c) - d$ , alors vous pouvez omettre les parenthèses, grâce à cette convention ; mais si vous voulez en écrire un

$$(a - (b - c)) - d, \quad (a - b) - (c - d), \quad a - ((b - c) - d), \quad a - (b - (c - d))$$

alors la convention ne vous aide pas et vous devez utiliser des parenthèses.

La convention d'évaluer d'abord l'opération la plus à gauche (en l'absence de parenthèses) est universellement acceptée dans le cas de la soustraction, mais pas pour les autres opérations. Si vous travaillez avec une opération non associative autre que la soustraction, vous ne devez pas supposer que vous pouvez utiliser cette convention.

Par exemple, supposons que  $\wedge$  désigne l'opération d'exponentiation sur l'ensemble  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  d'entiers strictement positif (c'est-à-dire  $2 \wedge 3 = 2^3 = 8$  et  $3 \wedge 2 = 3^2 = 9$ ). Alors  $(A, \wedge)$  est un magma. Si vous entrez l'expression  $2 \wedge 2 \wedge 3$  sur votre calculatrice, elle vous donnera probablement la réponse 64 ; la calculatrice évalue d'abord l'opération la plus à gauche :

$$2 \wedge 2 \wedge 3 = (2 \wedge 2) \wedge 3 = (2^2)^3 = 4^3 = 64.$$

Cependant, si vous posez la même question à une mathématicienne, elle fera probablement ceci :

$$2 \wedge 2 \wedge 3 = 2^{2^3} = 2^8 = 256,$$

donc le mathématicien évalue d'abord l'opération la plus à droite. Pour la même raison, un mathématicien interprétera toujours  $e^{x^2}$  comme signifiant  $e^{(x^2)}$ , jamais comme  $(e^x)^2$ .

*Conclusion* : Utilisez des parenthèses chaque fois qu'il y a un risque de confusion.

## Exercises.

**Exercise A.2.1.** Calculez les cinq interprétations possibles de  $16 \div 8 \div 4 \div 2$  (deux de ces interprétations donnent le même résultat mais les autres sont toutes différentes, vous devriez donc obtenir quatre nombres différents).

### A.3 Éléments neutres

**Definition A.3.1** (Élément neutre). Supposons que  $(E, \star)$  soit un magma. Si  $e$  est un élément de  $E$  satisfaisant

$$e \star x = x = x \star e \quad \text{pour tous } x \in E,$$

on dit que  $e$  est un *élément neutre* ou *unité* de  $(E, \star)$ .

*Exemples A.3.2.* (a) 0 est un élément neutre de  $(\mathbb{R}, +)$  car

$$0 + x = x = x + 0 \quad \text{pour tous } x \in \mathbb{R}.$$

(b) 1 est un élément neutre de  $(\mathbb{R}, \cdot)$  car

$$1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad \text{pour tous } x \in \mathbb{R}.$$

Notez que dans les exemples ci-dessus, le même ensemble a des éléments neutres différentes pour différentes opérations. Donc un élément neutre dépend de l'ensemble *et* l'opération.

*Exemple A.3.3.*  $(\mathbb{R}, -)$  a-t-il un élément neutre? Supposons que  $e$  soit un élément neutre. On aurait alors

$$x - e = x \quad \text{pour tous les } x \in \mathbb{R}.$$

Ceci est satisfait pour  $e = 0$  et on pourrait donc être tenté de penser que 0 est un élément neutre. Mais nous devons aussi avoir

$$e - x = x \quad \text{pour tous les } x \in \mathbb{R}.$$

Pour *chaque* élément  $x$ , l'équation  $e - x = x$  n'est satisfaite que pour  $e = 2x$ . Mais  $2x$  a une valeur différente pour chaque  $x$  (et n'est égal à zéro que pour  $x = 0$ ). Par conséquent, il n'y a pas  $e \in \mathbb{R}$  qui satisfait  $e - x = x$  pour *tout*  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $(\mathbb{R}, -)$  n'a pas d'élément neutre.

Nous avons vu que certains magmas n'ont pas d'élément neutre, alors que d'autres en ont. Mais est-il possible qu'un magma ait plus d'un élément neutre?

**Theorem A.3.4.** *Un magma donné ne peut avoir qu'un seul élément neutre.*

*Démonstration.* Supposons que  $(E, \star)$  est un magma et que  $e_1, e_2$  sont des éléments neutre éléments de  $(E, \star)$ . Alors

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1 \star e_2 && \text{(car } e_2 \text{ est un élément neutre élément)} \\ &= e_2 && \text{(car } e_1 \text{ est un élément neutre).} \end{aligned}$$

□

## Exercices.

A.3.1. Vérifiez que le magma  $(E, \star)$  dans Example A.1.5 n'a pas d'élément neutre.

A.3.2. Dans le magma  $(\mathbb{R}^*, \div)$ , l'opération est-elle commutative? Associatif? A-t-il un élément neutre?

A.3.3. Considérons l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et l'opération  $\star$  définis par :

$\star$	1	2	3	4
1	1	2	1	4
2	2	3	2	4
3	1	2	3	4
4	4	4	4	4

Le magma  $(E, \star)$  possède-t-il un élément neutre? Si oui, trouvez tous les éléments inversibles de  $(E, \star)$ .

A.3.4. Considérons la paire  $(\mathbb{R}, \star)$ , où  $x \star y = 2^x 2^y$ . Par exemple,  $3 \star (-1) = 2^3 2^{-1} = 4$ .

- La paire  $(\mathbb{R}, \star)$  est-elle un magma? Si oui, a-t-elle un élément neutre?
- Si on restreint  $\star$  à  $\mathbb{Z}$ , la paire  $(\mathbb{Z}, \star)$  est-elle un magma?

## A.4 Éléments inversibles

**Definition A.4.1** (Inversible, inverse). Soit  $(E, \star)$  un magma et supposons que  $(E, \star)$  possède un élément neutre  $e \in E$ .

Un élément  $a \in E$  est *inversible* s'il existe au moins un  $x \in E$  satisfaisant

$$a \star x = e = x \star a.$$

Un tel  $x$  est alors appelé *un inverse* de  $a$ .

Il est important de noter que cela n'a de sens de parler d'inversibilité et d'inverses que si le magma a un élément neutre.

*Exemples A.4.2.* (a) Dans  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $-2$  est-il inversible? Existe-t-il  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$(-2) + x = 0 = x + (-2)?$$

Oui,  $x = 2$  fonctionne. Donc  $-2$  est inversible et  $2$  est un inverse de  $-2$ . En fait, dans  $(\mathbb{R}, +)$ , tous les éléments sont inversibles : l'inverse de  $x \in \mathbb{R}$  est  $-x$ .

(b) Dans  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ,  $-2$  est-il inversible ? Existe-t-il  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$(-2) \cdot x = 1 = x \cdot (-2)?$$

Oui,  $x = -1/2$  satisfait à cette exigence. Donc  $-2$  est inversible et  $-1/2$  est un inverse de  $-2$ .

Toujours dans  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ,  $0$  est-il inversible ? Existe-t-il  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$0 \cdot x = 1 = x \cdot 0?$$

Non, un tel  $x$  n'existe pas, donc  $0$  n'est pas inversible. En fait, l'ensemble des éléments inversibles de  $(\mathbb{R}, \cdot)$  est égal à  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . L'inverse de  $x \in \mathbb{R}^\times$  est  $1/x$ .

(c) L'élément  $2$  n'est pas un élément inversible dans le magma  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ . En fait, l'ensemble des éléments inversibles de  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  est égal à  $\{1, -1\}$ .

(d) Dans  $(\mathbb{R}, -)$ ,  $3$  est-il inversible ? STOP ! Cette question n'a pas de sens, car  $(\mathbb{R}, -)$  n'a pas d'élément neutre.

Lorsque  $(E, *)$  n'a pas d'élément neutre, le concept d'inversibilité n'est pas défini, il est donc absurde de se demander si un élément donné est inversible. Relisez Définition A.4.1 et faites attention au rôle joué par l'élément neutre dans cette définition. Voyez-vous que, si  $e$  n'existe pas, cela n'a aucun sens de parler d'inversibilité ?

(e) Voici un exemple troublant. Considérons l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et l'opération  $*$  définie par la table :

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	1	1
3	3	1	3	1
4	4	1	1	4

Donc  $(E, *)$  est un magma. Observez que  $1 * x = x = x * 1$  pour tout  $x \in E$ , donc  $(E, *)$  a un élément neutre (à savoir,  $1$ ) et par conséquent le concept d'inversibilité a du sens.

$2$  est-il inversible ? Existe-t-il  $x \in E$  satisfaisant

$$2 * x = 1 = x * 2?$$

Oui, il y a pair deux  $x$  de ce type :  $x = 3$  et  $x = 4$  satisfont cette condition. Donc  $2$  est inversible et a deux inverses :  $3$  et  $4$  sont des inverses de  $2$ .

Il est donc possible qu'un élément donné ait plus d'un inverse ! Cependant, nous verrons plus loin que ce phénomène désagréable ne se produit jamais lorsque l'opération est associative.

## Exercices.

A.4.1. Prouver que le magma de l'Exemple A.4.2(e) n'est pas associatif.

A.4.2. Soit  $(E, \star)$  un magma, d'élément neutre  $e$ . Montrer que  $e$  est inversible, et est son propre inverse (plus précisément, montrer que  $e$  est l'unique inverse de  $e$ ). Soit  $a, b \in E$ ; montrer que si  $b$  est un inverse de  $a$  alors  $a$  est un inverse de  $b$ .

A.4.3. Soit  $\times$  le produit vecteur (ou "produit vectoriel") sur  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $(\mathbb{R}^3, \times)$  est un magma.  $(1, 1, 2)$  est-il un élément inversible ?

## A.5 Monoïdes

**Definition A.5.1** (Monoïde). Un *monoïde* est un magma  $(E, \star)$  tel que

- $(E, \star)$  a un élément neutre, et
- l'opération  $\star$  est associative.

*Examples A.5.2.* (a)  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{N}, +)$  et  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sont des exemples de monoïdes. Aussi :  $(\mathbb{R}^2, +)$ ,  $(\mathbb{R}^3, +)$  et  $(\mathbb{R}^n, +)$  (pour tout  $n \geq 1$ ) sont des monoïdes. Tous ces exemples sont des monoïdes commutatifs.

- (b) Soit  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  et soit  $+$  une addition ordinaire. Alors  $(A, +)$  est un magma mais n'est pas un monoïde : l'opération est associative mais il n'y a pas élément neutre.
- (c) Considérez  $(E, \star)$  dans l'exemple A.4.2(e). Alors  $(E, \star)$  est un magma mais n'est pas un monoïde : il y a un élément neutre mais l'opération n'est pas associative (voir Exercice A.4.1).
- (d) Considérons l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et l'opération  $*$  définis par la table :

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

Donc  $(E, \star)$  est un magma et  $(E, \star)$  a un élément neutre (à savoir, 1). On peut également vérifier que  $*$  est associatif (cela demande un peu de travail, il suffit de le prendre pour acquis). Donc  $(E, \star)$  est un monoïde, et en fait c'est un *non commutatif* monoïde.

- (e) Dans MAT 1741, vous avez appris à multiplier des matrices. Soit  $E$  l'ensemble de toutes les matrices  $2 \times 2$  avec des entrées dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $\cdot$  la multiplication des matrices. Alors  $\cdot$  est une opération sur l'ensemble  $E$  (parce que le produit de deux matrices  $2 \times 2$  quelconques avec des entrées dans  $\mathbb{R}$  est à nouveau une matrice  $2 \times 2$  avec des entrées dans  $\mathbb{R}$ ), et par conséquent  $(E, \cdot)$  est un magma. En outre,

- l'élément  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de l'ensemble  $E$  est un élément neutre de ce magma ;
- dans  $(E, \cdot)$ , l'opération est associative (le produit matriciel est associatif).

Donc  $(E, \cdot)$  est un monoïde ; en fait c'est un monoïde non commutatif. Quels sont les éléments inversibles de ce monoïde ?

Notez que, dans tout monoïde, le concept d'inversibilité a un sens (parce que cela a du sens dans tout magma qui a un élément neutre).

**Theorem A.5.3.** *Dans un monoïde, un élément donné a au plus un inverse.*

*Démonstration.* Soit  $(E, \star)$  un monoïde et soit  $e$  son élément neutre. Considérez  $a \in E$  et supposez que  $x_1, x_2 \in E$  sont les inverses de  $a$  ; nous devons montrer que  $x_1 = x_2$ .

Comme  $x_1, x_2$  sont des inverses de  $a$ ,

$$a \star x_1 = e = x_1 \star a \quad \text{et} \quad a \star x_2 = e = x_2 \star a.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \star e && \text{(puisque } e \text{ est un élément neutre)} \\ &= x_1 \star (a \star x_2) && \text{(puisque } x_2 \text{ est un inverse de } a) \\ &= (x_1 \star a) \star x_2 && \text{(puisque } \star \text{ est associatif)} \\ &= e \star x_2 && \text{(puisque } x_1 \text{ est un inverse de } a) \\ &= x_2, && \text{(puisque } e \text{ est un élément neutre),} \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $x_1 = x_2$  et complète donc la preuve. □

Supposons que  $(E, \star)$  soit un monoïde. Si  $a$  est un élément inversible alors nous savons, par le théorème A.5.3, que  $a$  a exactement un inverse ; il est donc logique de parler de l'inverse de  $a$  (par opposition à *un* inverse de  $a$ ).

- (a) Supposons que l'opération dans notre monoïde soit une addition ; par exemple notre monoïde pourrait être  $(\mathbb{R}, +)$  ou  $(\mathbb{Z}, +)$  ou  $(\mathbb{R}^n, +)$ , etc. Alors nous disons que notre monoïde est un *monoïde additif* et nous utilisons souvent une notation spéciale :

- on écrit  $(E, +)$  au lieu de  $(E, \star)$
- l'élément neutre est d'habitude noté  $0$
- si  $a \in E$  est un élément inversible alors l'inverse de  $a$  est d'habitude noté  $-a$ . Si cette notation est utilisée alors  $-a$  est, par définition, l'unique élément de  $E$  satisfaisant  $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ .

- (b) Si l'opération dans notre monoïde  $(E, \star)$  n'est *pas* une addition, alors l'inverse d'un élément  $a$  est souvent noté  $a^{-1}$ . Alors, par définition de l'inverse,  $a^{-1}$  est l'unique élément de  $E$  qui satisfait

$$a \star a^{-1} = e = a^{-1} \star a,$$

où  $e$  désigne l'élément neutre de  $(E, \star)$ .

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$ , on définit une nouvelle fonction “ $f + g$ ” de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pour tous les } x \in \mathbb{R}.$$

Pour un exemple concret d'addition de fonctions, supposons que :

- $f$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$
- $g$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$ .

Alors la définition de  $f + g$  dit que  $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = \frac{1}{17} + \frac{3}{17} = \frac{4}{17}$ . Plus généralement, la définition de  $f + g$  dit que pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  nous avons

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-1}{x^4+1} + \frac{x+1}{x^4+1} = \frac{2x}{x^4+1}$$

donc  $f + g$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  définie par

$$(f + g)(x) = \frac{2x}{x^4+1}, \quad \text{pour tous les } x \in \mathbb{R}.$$

Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$ . Alors l'addition de fonctions que nous venons de définir est une opération sur l'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que tout  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  détermine un élément bien défini  $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Donc  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +)$  est un magma ; disons que c'est un monoïde commutatif. Avant d'aller dans cet argument, il est utile de rappeler ce que cela signifie que deux fonctions soient égales.

**Definition A.5.4** (Égalité des fonctions). Supposons que  $f, g$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont égaux, et on écrit  $f = g$ , si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les *nombres réels*  $f(x)$  et  $g(x)$  sont égaux.

Utilisons cette définition pour montrer que l'addition de fonctions est commutative. Soit  $f, g$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$ . Alors  $f + g$  et  $g + f$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et, pour prouver qu'elles sont égales, il faut montrer que pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , les nombres réels  $(f + g)(x)$  et  $(g + f)(x)$  sont égaux. Maintenant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donné, nous avons

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

où l'égalité au milieu est vraie car l'addition *de nombres réels* est commutative, et les deux autres égalités sont vraies par définition d'addition de fonctions. Ceci prouve que  $f + g = g + f$ , donc l'addition de fonctions est une opération commutative sur l'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . On peut imiter l'argument ci-dessus pour montrer que l'addition de fonction est associative (Exercice A.5.2).

Soit  $\mathbf{0}$  la fonction de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  qui est identiquement égal à zéro :

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad \text{pour tous les } x \in \mathbb{R}.$$

Puis  $\mathbf{0} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . On peut montrer (Exercice A.5.3) que  $\mathbf{0}$  est un élément neutre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Nous concluons que  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +)$  est un monoïde commutatif.

**Theorem A.5.5.** *Si  $a, b$  sont des éléments inversibles dans un monoïde  $(E, \star)$  alors  $a \star b$  est inversible et  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$ .*



*Démonstration.* Soit  $(E, \star)$  un monoïde, d'élément neutre  $e$ .

Supposons que  $a, b$  sont des éléments inversibles de  $(E, \star)$ . Soit  $v = b^{-1} \star a^{-1}$  et notons que  $v$  existe et est un élément de  $E$ . Calculons  $(a \star b) \star v$  et  $v \star (a \star b)$ ; rappelez-vous que  $\star$  est associatif, donc les parenthèses peuvent être déplacées à volonté, et même omises :

$$\begin{aligned}(a \star b) \star v &= (a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star e \star a^{-1} \\ &= (a \star e) \star a^{-1} = a \star a^{-1} = e, \\ v \star (a \star b) &= (b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = b^{-1} \star (a^{-1} \star a) \star b = b^{-1} \star e \star b \\ &= (b^{-1} \star e) \star b = b^{-1} \star b = e.\end{aligned}$$

Donc  $(a \star b) \star v = e = v \star (a \star b)$ ; cela prouve que  $a \star b$  est inversible et que son inverse est  $v$ . □

## Exercises.

A.5.1. Trouver tous les éléments inversibles du monoïde de l'exemple [A.5.2\(d\)](#). Trouvez également un inverse de chaque élément inversible.

A.5.2. Montrer que l'addition de fonctions est associative.

A.5.3. Montrer que  $\mathbf{0} + f = f = f + \mathbf{0}$  pour tout  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . *Indice* :  $\mathbf{0} + f$  et  $f$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ; pour prouver qu'elles sont égales, utilisez la définition [A.5.4](#).

A.5.4. Montrer que, dans le monoïde  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +)$ , chaque élément est inversible. Suivant les conventions des monoïdes additifs, l'inverse d'un élément  $f$  est noté  $-f$ . (Ici, nous parlons de l'inverse additif de  $f$ ; cela n'a rien à voir avec le concept de fonction inverse.)

A.5.5. Considérons le magma  $(\mathbb{R}^2, \star)$  où l'opération  $\star$  est définie par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', yy') \quad \text{pour tous les } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Ce magma est-il un monoïde ?
- (b) Quels sont les éléments inversibles de  $(\mathbb{R}^2, \star)$  ? Montrer que  $(2, 3)$  est un élément inversible de  $(\mathbb{R}^2, \star)$  et trouver tous les inverses de  $(2, 3)$ . Assurez-vous de justifier que vous les avez tous trouvés.

A.5.6. On définit une nouvelle opération  $\oplus$  sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par  $x \oplus y = x + y + 3$ , où le "+" dans la membre de droite est l'opération + ordinaire pour les nombres. Par exemple,  $7 \oplus 5 = 15$ . Alors  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un magma.

- (a) Vérifiez que le nombre réel 0 n'est *pas* un élément neutre de  $(\mathbb{R}, \oplus)$ .

- (b) Trouver un nombre réel  $e$  qui est un élément neutre de  $(\mathbb{R}, \oplus)$  (alors, par Théorème A.3.4,  $e$  est l'élément neutre unique de  $(\mathbb{R}, \oplus)$ ). Notez que, même si  $\oplus$  ressemble à une addition, ce serait une mauvaise idée de désigner l'élément neutre de  $(\mathbb{R}, \oplus)$  par le symbole  $0$ , car alors  $0$  désignerait deux nombres différents (le nombre réel zéro et l'élément neutre du monoïde  $(\mathbb{R}, \oplus)$ ). On désignera donc cet élément neutre par  $e$ .
- (c) Soit  $x, y, z$  des nombres réels arbitraires. Calculer le nombre réel  $(x \oplus y) \oplus z$ ; puis calculer le nombre réel  $x \oplus (y \oplus z)$ ; puis vérifiez que vous avez obtenu la même réponse dans les deux calculs. Cet argument montre que  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , vous venez donc de prouver que  $\oplus$  est associatif. Au vu de (b), vous pouvez conclure que  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un monoïde. Prouvez également que  $\oplus$  est commutatif (calculez  $x \oplus y$  et  $y \oplus x$  séparément, et voyez que vous obtenez le même nombre dans les deux cas) donc  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un monoïde commutatif.
- (d) Montrez que  $5$  est un élément inversible de  $(\mathbb{R}, \oplus)$  et trouvez son inverse. (Utilisons la notation  $\bar{5}$  pour l'inverse de  $5$  dans  $(\mathbb{R}, \oplus)$ .)
- (e) Montrer que dans le monoïde  $(\mathbb{R}, \oplus)$ , tout élément est inversible. Trouver l'inverse  $\bar{a}$  de chaque élément  $a$  du monoïde. Qu'est-ce que  $\overline{-3}$ ? Qu'est-ce que  $\bar{0}$ ?
- (f) Si nous considérons  $\oplus$  comme étant une addition, alors nous aimerions définir une nouvelle opération  $\ominus$  sur  $\mathbb{R}$  qui agirait comme une soustraction. L'idée est que soustraire  $b$  devrait être équivalent à ajouter l'inverse de  $b$ . On définit donc une nouvelle opération  $\ominus$  sur  $\mathbb{R}$  par : étant donné  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \ominus b = a \oplus \bar{b}$ . Calculez  $0 \ominus 5$  et  $5 \ominus 0$  (attention ! c'est déroutant). Notez que  $(\mathbb{R}, \ominus)$  est un magma, mais  $\ominus$  n'est ni commutatif, ni associatif, et il n'y a pas élément neutre. Montrer que la solution  $x$  de l'équation  $x \oplus a = b$  est  $x = b \ominus a$  (attention ; montrer que  $x = b \ominus a$  est une solution de l'équation donnée, et montrer qu'elle est *le seul* la solution).

## A.6 Corps

**Definition A.6.1** (Corps). Un *corps* est un triplet  $(F, +, \cdot)$  où  $F$  est un ensemble,  $+$  et  $\cdot$  sont deux opérations binaires sur  $F$ , appelées *addition* et *multiplication*, respectivement, et les conditions suivantes sont satisfaites :

- (A1) Pour tout  $a, b \in F$ , on a  $a + b = b + a$ . (commutativité de l'addition)
- (A2) Pour tout  $a, b, c \in F$ , on a  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . (associativité d'addition)
- (A3) Il existe un élément  $0 \in F$  tel que, pour tout  $a \in F$ ,  $a + 0 = 0 + a = a$ . L'élément  $0$  est unique et s'appelle le *neutre additif*.
- (A4) Pour tout  $a \in F$ , il existe un élément  $-a \in F$  tel que  $a + (-a) = 0$ . L'élément  $-a$  est uniquement déterminé par  $a$  et est appelé le *l'inverse additif* ou *opposé* de  $a$ .
- (M1) Pour tout  $a, b \in F$ , nous avons  $a \cdot b = b \cdot a$ . (commutativité de la multiplication)
- (M2) Pour tout  $a, b, c \in F$ , nous avons  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . (associativité de la multiplication)
- (M3) Il y a un élément  $1 \in F$  *non nul* tel que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  pour tout  $a \in F$ . L'élément  $1$  est unique et s'appelle le *neutre multiplicatif* ou *unité multiplicative*.
- (M4) Pour tout  $a \in F$ ,  $a \neq 0$ , il existe un élément  $a^{-1} \in F$  tel que  $aa^{-1} = 1$ . L'élément  $a^{-1}$  est déterminé de manière unique par  $a$  et est appelé *l'inverse multiplicatif* de  $a$ .

(AM1) Pour tout  $a, b, c \in F$ , nous avons  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . (distributivité)

On note souvent la multiplication simplement par juxtaposition. Par exemple, si  $a, b \in F$ , alors  $ab$  signifie  $a \cdot b$ . On dit aussi parfois “ $F$  est un corps” (au lieu de “ $(F, +, \cdot)$  est un corps”) lorsque les deux opérations (addition et multiplication) sont claires.

*Remark A.6.2.* (a) Supposons que  $(F, +, \cdot)$  est un corps. Définition A.6.1 implique que  $(F, +)$  et  $(F, \cdot)$  sont tous les deux *des monoïdes commutatifs* : des ensembles avec une opération associative et un élément neutre (voir Section A.5). Dans tout monoïde, les éléments neutres sont uniques et les éléments inversibles ont exactement un inverse (voir Théorème A.5.3). Cela justifie les revendications d’unicités faites dans Définition A.6.1.

(b) Notre hypothèse dans (M3) selon laquelle  $1 \neq 0$  est cruciale, comme nous le verrons dans Remarque A.6.9.

*Remark A.6.3.* Un ensemble  $R$  avec deux opérations  $+$  et  $\cdot$  vérifiant tous les axiomes de Définition A.6.1 sauf éventuellement (M1) et (M4) est appelé un *anneau*. S’il satisfait également (M1), c’est un *anneau commutatif*. Ainsi, un corps est un anneau commutatif dans lequel chaque élément non nul a un inverse multiplicatif.

Notez que la distributivité et la commutativité de la multiplication impliquent

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{pour tous } a, b, c \in F$$

puisque

$$(a + b)c = c(a + b) = ca + cb = ac + bc.$$

On a donc une distributivité dans les deux sens.

Si  $F$  est un corps, nous pouvons voir n’importe quel entier comme un élément de  $F$ . Tout d’abord, nous considérons l’entier zéro comme le  $0 \in F$ . Alors, pour  $n > 0$ , nous avons

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ summands}} \in F, \tag{A.1}$$

où 1 est ici le neutre multiplicatif de  $F$ . Pour  $n < 0$ , nous définissons alors

$$n = -(-n) = -\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{-n \text{ summands}} \in F. \tag{A.2}$$

Alors, par exemple, si  $a \in F$ , nous pouvons écrire des expressions comme

$$5a = (1 + 1 + 1 + 1 + 1)a = a + a + a + a + a.$$

Une grande partie de l’algèbre que nous avons faite dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  peut être faite dans un corps arbitraire. Cependant, lorsque vous travaillez dans un corps arbitraire, veillez à n’utiliser que les propriétés garanties par la définition A.6.1. En particulier, faites attention aux points suivants :

- Dans un corps arbitraire, il ne faut pas utiliser d’inégalités. L’expression  $a < b$  n’a pas de sens pour  $a, b$  dans un corps arbitraire  $F$ , même si elle a du sens lorsque  $F = \mathbb{R}$ . Même quand  $F = \mathbb{C}$ , il n’y a pas de bonne notion d’ordre entre les nombres complexes.

- Même si  $n$  et  $m$  sont des entiers distincts, ils peuvent être égaux lorsqu'ils sont considérés comme des éléments d'un corps  $F$  comme dans (A.1) et (A.2). Par exemple  $5 = 0$  dans  $\mathbb{F}_5$ .

*Exemples A.6.4.* (a) Nous voyons que  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  sont des corps, avec l'addition et la multiplication habituelles.

- (b) Les entiers  $\mathbb{Z}$  (avec l'addition et la multiplication habituelles) ne forment *pas* un corps car il contient des éléments non nuls qui n'ont pas d'inverses multiplicatifs (par exemple, 2).
- (c) L'ensemble  $M_n(\mathbb{R})$  de matrices  $n \times n$  (avec entrées de nombres réels) avec addition et multiplication de matrices, n'est *pas* un corps pour  $n \geq 2$  car il existe des matrices non nulles (la matrice nulle est le neutre additif) qui n'ont pas d'inverses multiplicatifs. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

n'est pas la matrice nulle mais n'est toujours pas inversible puisque son déterminant est nul. En fait,  $M_n(\mathbb{R})$  est un anneau (voir Remarque A.6.3).

Pour le reste de cette section,  $F$  est un corps.

**Lemma A.6.5** (Lois d'annulation). *Pour tout  $a, b, c \in F$ , les déclarations suivantes sont valables :*

- (a) Si  $a + b = a + c$ , alors  $b = c$ .
- (b) Si  $ab = ac$  et  $a \neq 0$ , alors  $b = c$ .

*Démonstration.* (a) Supposons  $a, b, c \in F$ . Alors

$$\begin{aligned} a + b &= a + c \\ \implies (-a) + a + b &= (-a) + a + c \\ \implies 0 + b &= 0 + c && \text{(par (A4))} \\ \implies b &= c. && \text{(par (A3))} \end{aligned}$$

- (b) La preuve de cette partie est laissée en exercice (Exercice A.6.3). □

*Exemple A.6.6.* Dans le corps  $\mathbb{R}$  l'égalité  $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$  est vraie, mais  $2 \neq 3$ . Cela ne contredit pas Lemma A.6.5(b) à cause de l'exigence  $a \neq 0$ .

*Exemple A.6.7.* Soit  $M_2(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  avec des nombres réels. Nous avons des opérations d'addition matricielle et de multiplication matricielle sur  $M_2(\mathbb{R})$ . Supposer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AX',$$

mais  $X \neq X'$ . Le problème ici est que  $M_2(\mathbb{R})$  n'est pas un corps (voir Exemple A.6.4(c)). En particulier,  $A$  n'a pas d'inverse multiplicatif.

**Proposition A.6.8.** *Soit  $F$  un corps.*

- (a)  $0x = 0$  pour tous les  $x \in F$ .
- (b)  $(-1)x = -x$  pour tous les  $x \in F$ .
- (c)  $(-a)b = -(ab) = a(-b)$  pour tous les  $a, b \in F$ .

*Démonstration.* (a) Soit  $x \in F$ . Alors

$$0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = 0x + 0.$$

Alors nous avons  $0x = 0$  par le lemme A.6.5(a).

(b) Soit  $x \in F$ . Alors

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0.$$

Cela implique que  $(-1)x$  est l'inverse additif de  $x$ , donc  $(-1)x = -x$ .

(c) Soit  $a, b \in F$ . Alors

$$(-a)b = ((-1)a)b = (-1)(ab) = -(ab)$$

et

$$a(-b) = a((-1)b) = ((-1)b)a = (-1)(ba) = (-1)(ab) = -(ab).$$

□

*Remark A.6.9.* Nous voyons maintenant pourquoi l'hypothèse  $1 \neq 0$  dans (M3) est si importante. Si  $1 = 0$  alors, pour tout  $a \in F$ , on a

$$a = 1a = 0a = 0.$$

Ainsi  $F$  n'a que l'élément zéro, et n'est donc pas très intéressant !

**Proposition A.6.10.** *Supposons que  $x, y$  sont des éléments d'un corps  $F$ . Si  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ , alors  $xy \neq 0$ .*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition est laissée en exercice (Exercice A.6.5). □

**Definition A.6.11** (Soustraction). Supposons que  $F$  est un corps. On définit l'opération – de soustraction sur  $F$  par

$$a - b = a + (-b), \quad \text{pour tous } a, b \in F.$$

## Exercices.

A.6.1. Vérifiez directement que  $\mathbb{F}_2$ , tel que défini dans Exemple 1.1.3 est un corps, en utilisant la définition A.6.1.

A.6.2. Définir une addition et une multiplication sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{and} \quad (x, y)(x', y') = (xx', yy'), \quad \text{pour } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est-il un corps ?

A.6.3. Démontrer le lemme A.6.5(b).

A.6.4. Montrer que l'élément 0 d'un corps  $F$  n'a pas d'inverse multiplicatif (*Indice* : Utilisez la proposition A.6.8(a) et le fait que  $1 \neq 0$ , tel que garanti par (M3).) Puisque, par la définition d'un corps, tous les éléments non nuls ont un inverse multiplicatif, cela montre que l'ensemble des éléments inversible d'un corps  $F$  est *exactement*  $F^\times$ .

A.6.5. Démontrer la proposition A.6.10.

A.6.6. Supposons que  $a, b, c$  sont des éléments d'un corps  $F$ . Montre que :

(a)  $a - a = 0$ ,

(b)  $a(b - c) = ab - ac$ , et

(c)  $(a - b)c = ac - bc$ .

A.6.7. Supposons que  $F$  est un corps contenant un élément  $c$  tel que  $c \neq 0$  et  $c + c = 0$ . Montrez que  $1 + 1 = 0$  dans ce corps.

A.6.8. Montrer que si  $F$  est un corps et que  $x, y \in F$  satisfait  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ , alors  $xy \neq 0$ .

A.6.9. Supposons que  $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  n'est pas premier. Soit  $\mathbb{F}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  et définissons l'addition et la multiplication comme suit : Pour  $a, b \in \mathbb{F}_n$ ,

$$a + b = \text{reste après division de } a + b \text{ par } n,$$

$$a \cdot b = \text{reste après division de } ab \text{ par } n.$$

Prouver que  $\mathbb{F}_n$  n'est pas un corps. *Indice* : Utilisez Exercice A.6.8.

# Annexe B

## Espaces quotients et premier théorème d'isomorphisme

Dans cette annexe facultative, nous discutons de l'idée d'un espace vectoriel quotient. Les espaces vectoriels quotients sont des espaces vectoriels dont les éléments sont des classes d'équivalence sous une certaine relation d'équivalence. Nous rappelons l'idée d'une relation d'équivalence, définissons des espaces vectoriels quotients, puis prouvons le "premier théorème d'isomorphisme". Cela nous donne une méthode alternative pour prouver le théorème du rang (théorème 3.5.1).

### B.1 Relations d'équivalence et ensembles de quotients

**Definition B.1.1** (Relation d'équivalence). Soit  $X$  un ensemble non vide. Supposons que pour chaque paire ordonnée  $(x, y)$  d'éléments de  $X$ , on nous donne une proposition  $S(x, y)$  sur  $x$  et  $y$ . On écrit  $x \sim y$  si l'énoncé  $S(x, y)$  est vrai. On dit que  $\sim$  est une *relation d'équivalence* sur  $X$  si les trois conditions suivantes sont remplies :

- (a) *reflexivité* :  $x \sim x$  pour tout  $x \in X$ ,
- (b) *symétrie* : si  $x \sim y$  alors  $y \sim x$ ,
- (c) *transitivité* : si  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , alors  $x \sim z$ .

Si  $x \sim y$ , on dit que  $x$  est *équivalent* à  $y$  (pour la relation  $\sim$ ).

*Example B.1.2* (Congruence modulo  $n$ ). Fixons un entier strictement positif  $n$  et considérons l'ensemble  $\mathbb{Z}$  d'entiers. Pour  $x, y \in \mathbb{Z}$ , soit  $S(x, y)$  la proposition

“( $x - y$ ) est un multiple entier de  $n$ .”

Alors  $x \sim y$  si et seulement si  $x - y$  est un multiple intégrable de  $n$ . En d'autres termes,  $x \sim y$  si  $(x - y) = kn$  pour certains  $k \in \mathbb{Z}$ . Si nous écrivons  $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$  pour l'ensemble des multiples entiers de  $n$ , alors nous avons

$$x \sim y \iff (x - y) \in n\mathbb{Z}.$$

Vérifions que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathbb{Z}$ .

- *Symétrie* : Pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , on a  $x - x = 0 \in n\mathbb{Z}$ , donc  $x \sim x$ .
- *Réflexivité* : Supposons  $x \sim y$  pour  $x, y \in \mathbb{Z}$ . c'est à dire  $x - y \in n\mathbb{Z}$ , mais alors  $y - x = -(x - y) \in n\mathbb{Z}$  (puisque si  $x - y = kz$  pour un entier  $k$ , alors  $y - x = (-k)z$ , qui est aussi un multiple entier de  $n$ ) et donc  $y \sim x$ .
- *Transitivité* : Supposons  $x \sim y$  et  $y \sim z$  pour  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . On a donc  $x - y = k_1n$  pour  $k_1 \in \mathbb{Z}$  et  $y - z = k_2n$  pour  $k_2 \in \mathbb{Z}$ . Mais alors

$$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1n + k_2n = (k_1 + k_2)n \in n\mathbb{Z},$$

depuis  $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ . Cette relation d'équivalence a sa propre notation spéciale. Si  $x \sim y$ , on écrit

$$x \equiv y \pmod{n},$$

et dire que  $x$  est *congru à  $y$  modulo  $n$* .

*Exemple B.1.3.* Supposons que  $A$  et  $B$  sont des ensembles et que  $f: A \rightarrow B$  est n'importe quelle fonction (application d'ensembles). Pour  $x, y \in A$ , écrivez  $x \sim y$  si  $f(x) = f(y)$ . Vérifions que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

- (a) *Réflexive* : Pour tout  $x \in A$ , on a  $x \sim x$  depuis  $f(x) = f(x)$ .
- (b) *Symétrique* : Si  $x, y \in A$  tel que  $x \sim y$ , alors  $f(x) = f(y)$ . D'où  $f(y) = f(x)$  et donc  $y \sim x$ .
- (c) *Transitive* : Supposons  $x, y, z \in A$  tel que  $x \sim y$  et  $y \sim z$ . Puis  $f(x) = f(y) = f(z)$  et donc  $x \sim z$ .

*Exemple B.1.4.* Supposons que  $M$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ . Pour  $u, v \in V$ , écrivez  $u \sim v$  si  $u - v \in M$ . Alors  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $V$ . On vérifie les trois propriétés d'une relation d'équivalence.

- (a) *Réflexive* : Pour tout  $v \in V$ , nous avons  $v - v = \mathbf{0} \in M$ , puisque  $M$  est un sous-espace.
- (b) *Symétrique* : Pour tout  $u, v \in V$  tel que  $u \sim v$ , on a  $u - v \in M$ . Alors

$$v - u = -(u - v) = (-1)(u - v) \in M$$

puisque  $M$  est un sous-espace vectoriel et donc est fermé par multiplication scalaire.

- (c) *Transitif* : Supposons  $u, v, w \in V$  tel que  $u \sim v$  et  $v \sim w$ . Puis  $u - v \in M$  et  $v - w \in M$ . Alors

$$u - w = (u - v) + (v - w) \in M$$

puisque  $M$  est un sous-espace et donc est fermé par addition vecteur .

**Definition B.1.5** (Classe d'équivalence). Supposons que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur un ensemble  $X$ . Pour  $x \in X$ , nous définissons

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

l'ensemble de tous les éléments de  $X$  qui sont équivalents à  $x$ . Nous appelons  $[x]$  la *classe d'équivalence* de  $x$ .



*Exemple B.1.6.* Considérons la relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$  donnée par la congruence modulo  $n$  (Exemple B.1.2). Alors, pour  $a \in \mathbb{Z}$ , nous avons

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a - b \in n\mathbb{Z}\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} := a + n\mathbb{Z}.$$

*Exemple B.1.7.* Supposons que  $A, B$  sont des ensembles,  $f: A \rightarrow B$  est n'importe quelle fonction et  $\sim$  est la relation d'équivalence d'Exemple B.1.3. Alors, pour  $x \in A$ ,

$$[x] = \{y \in A \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\}).$$

*Exemple B.1.8.* Supposons que  $M$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$  et que  $\sim$  est la relation d'équivalence de l'exemple B.1.4. Alors, pour  $v \in V$ ,

$$[v] = \{v + z \mid z \in M\}.$$

Pour le prouver, supposons que  $w \in [v]$ . Alors, par définition,  $v \sim w$  et donc  $v - w \in M$ . C'est-à-dire  $v - w = z$  pour certains  $z \in M$ . Ainsi  $w = v + (-z)$ . Donc  $[v] \subseteq \{v + z \mid z \in M\}$ .

Supposons maintenant  $w = v + z$  pour certains  $z \in M$ . Alors  $v - w = -z = (-1)z \in M$ , puisque  $M$  est un sous-espace. D'où  $v \sim w$  et donc  $w \in [v]$ . Par conséquent,  $\{v + z \mid z \in M\} \subseteq [v]$ .

**Definition B.1.9** (Classe d'équivalence). Pour un sous-espace  $M$  d'un espace vectoriel  $V$  et  $v \in V$ , on écrit

$$v + M = \{v + z \mid z \in M\}$$

et on appelle cela la *classe d'équivalence de  $v$  modulo  $M$* .

*Exemple B.1.10.* Définir une forme linéaire  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Let

$$M = \text{Ker } f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

Donc  $M$  est une droite passant par l'origine. Notez que la domaine de valeurs de la fonction de  $f$  est  $\mathbb{R}$  puisque, par exemple, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons  $f(0, -x) = x$ .

Pour  $c \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$f^{-1}(\{c\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = c\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = c\},$$

qui est une droite parallèle à  $M$  (et égale à  $M$  si et seulement si  $c = 0$ ).

Considérons la relation d'équivalence de l'Exemple B.1.3. Sous cette relation d'équivalence, pour  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , nous avons

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0 \iff f(x - y) = 0 \iff x - y \in \text{Ker } f = M,$$

où nous avons utilisé le fait que  $f$  est linéaire. On voit donc que cette relation d'équivalence s'accorde avec celle de l'Exemple B.1.4.

Pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$[v] = v + M = f^{-1}(\{f(v)\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = f(v)\}.$$

Il s'agit de la ligne dans  $\mathbb{R}^2$  passant par  $v$  et parallèle à  $M$ . Par exemple, si  $v = (3, 1)$ , alors  $[v]$  est le plan d'équation

$$2x_1 - x_2 = 2(3) - (1) = 5.$$

On voit que la relation d'équivalence "décompose" le plan en un ensemble de droites parallèles. Chaque point du plan  $\mathbb{R}^2$  appartient exactement à une de ces droites.

**Définition B.1.11** (Cloison). Supposons que  $X$  est un ensemble non vide. Une *partition* de  $X$  est une collection  $\mathcal{A}$  de sous-ensembles de  $X$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- (a) chaque  $A \in \mathcal{A}$  est un sous-ensemble *non vide* de  $X$ ,
- (b) si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \neq B$ , alors  $A \cap B = \emptyset$ ,
- (c) chaque élément de  $X$  appartient à l'un des sous-ensembles de  $\mathcal{A}$  (en d'autres termes, pour chaque  $x \in X$ , il existe des  $A \in \mathcal{A}$  tels que  $x \in A$ ).

*Remark B.1.12.* La troisième propriété d'une partition dit que chaque élément de  $X$  appartient à l'un des sous-ensembles de la partition. La deuxième propriété dit qu'aucun élément ne se trouve dans plus d'un des sous-ensembles de la partition. Par conséquent, en combinant ces deux faits, nous voyons que la propriété fondamentale d'une partition est que chaque élément de  $X$  appartient à *exactement un* des sous-ensembles de la partition.

Il s'avère que les relations d'équivalence et les partitions sont simplement deux façons différentes de penser à la même chose. La relation précise est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème B.1.13.** *Soit  $X$  un ensemble non vide.*

- (a) *Si  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , alors l'ensemble des classes d'équivalence est une partition de  $X$ .*
- (b) *Supposons que  $\mathcal{A}$  est une partition de  $X$ . Si on pose  $x \sim y$  si  $x$  et  $y$  appartiennent au même élément de  $\mathcal{A}$  (c'est-à-dire qu'il existe un  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $x, y \in A$ ). Alors  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .*

*Démonstration.* (a) Supposons que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $X$  et que  $\mathcal{A}$  soit l'ensemble des classes d'équivalence. Nous voulons montrer que  $\mathcal{A}$  satisfait les conditions de Définition B.1.11.

- Tout d'abord, pour toute classe d'équivalence  $[x]$ , on a  $x \in [x]$  (depuis  $x \sim x$  par la réflexivité d'une relation d'équivalence). Par conséquent, toutes les classes d'équivalence sont non vides.
- Supposons que  $[x]$  et  $[y]$  soient deux classes d'équivalences et  $[x] \neq [y]$ . Nous voulons montrer que  $[x] \cap [y] = \emptyset$ . Nous le prouvons par contradiction. Supposons  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ . Ainsi, nous pouvons choisir un élément  $z \in [x] \cap [y]$ . Nous allons montrer que cela implique que  $[x] = [y]$ . Soit  $w \in [x]$ , c'est à dire  $x \sim w$ . Comme  $z \in [x] \cap [y]$ , nous avons  $z \in [x]$  et  $z \in [y]$ . Ainsi  $x \sim z$  et  $y \sim z$ . Par symétrie,  $z \sim x$ . Ainsi

$$y \sim z \sim x \sim w.$$

Par transitivité,  $y \sim w$  et donc  $w \in [y]$ . D'où  $[x] \subseteq [y]$ . Répéter l'argument ci-dessus mais en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$  montre que  $[y] \subseteq [x]$ . D'où  $[x] = [y]$ . Cela contredit l'hypothèse selon laquelle  $[x] \neq [y]$ . Par conséquent,  $[x] \cap [y] = \emptyset$ .

- La dernière propriété est facile puisque pour chaque  $x \in X$ , nous avons  $x \in [x]$  et donc chaque élément de  $x$  appartient à un élément de  $\mathcal{A}$ .

(b) Supposons maintenant que  $\mathcal{A}$  est une partition de  $X$  et définissons  $x \sim y$  s'il existe des  $A \in \mathcal{A}$  tels que  $x, y \in A$ . Nous souhaitons vérifier que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

- *Réflexivité* : Pour tout  $x \in X$ , nous avons  $x \in [x]$ . Ainsi  $x \sim x$ .
- *Symétrie* : Supposons  $x, y \in X$  et  $x \sim y$ . Ainsi, il existe des  $A \in \mathcal{A}$  tels que  $x, y \in A$ . Ainsi  $y \sim x$  également.
- *Transitivité* : Supposons  $x, y, z \in X$ ,  $x \sim y$  et  $y \sim z$ . Alors il y a  $A, B \in \mathcal{A}$  tel que  $x, y \in A$  et  $y, z \in B$ . Cela implique notamment que  $y \in A \cap B$ . Ainsi  $A \cap B \neq \emptyset$ . Par conséquent, par la définition d'une partition, nous avons  $A = B$ . Par conséquent,  $x$  et  $z$  appartiennent au même élément  $A = B$  de  $\mathcal{A}$ . D'où  $x \sim z$ .

□

De ce théorème, on peut déduire quelques propriétés des classes d'équivalence des relations.

**Corollary B.1.14.** *Supposons que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur un ensemble non vide  $X$ .*

- (a) *Pour tout  $x, y \in X$ , nous avons soit  $[x] = [y]$  soit  $[x] \cap [y] = \emptyset$ .*
- (b) *Pour  $x, y \in X$ , nous avons  $x \sim y$  si et seulement si  $[x] = [y]$ .*

*Démonstration.* (a) Cela découle immédiatement du théorème B.1.13, qui dit que les classes d'équivalence forment une partition.

- (b) Si  $x \sim y$ , alors  $y \in [x]$ . Nous avons également  $y \in [y]$ . Ainsi  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$  et donc  $[x] = [y]$  par la première partie du corollaire. Inversement, si  $[x] = [y]$ , alors  $y \in [x]$  (depuis  $y \in [y]$ ). D'où  $x \sim y$ .

□

Nous pouvons appliquer ce corollaire à la relation d'équivalence de Exemple B.1.4 pour obtenir le résultat suivant.

**Corollary B.1.15.** *Si  $M$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ , alors*

- (a) *pour tout  $x, y \in V$ , nous avons  $x + M = y + M$  ou  $(x + M) \cap (y + M) = \emptyset$ .*
- (b)  *$x - y \in M$  si et seulement si  $x + M = y + M$ , et*

**Definition B.1.16** (Ensemble de quotient). Supposons que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur un ensemble  $X$ . Alors l'ensemble des classes d'équivalence

$$\{[x] \mid x \in X\}$$

s'appelle le *quotient* de  $X$  pour la relation  $\sim$ , et est noté  $X/\sim$ . Dans le cas particulier où  $M$  est un sous-espace de  $V$  et la relation d'équivalence est celle de Exemple B.1.4, l'ensemble quotient est noté  $V/M$ . Ainsi

$$V/M = \{x + M \mid x \in V\}.$$

*Exemple B.1.17.* Considérez la situation de l'Exemple B.1.10, où  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la forme linéaire définie par

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$M = \text{Ker } f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

Alors  $\mathbb{R}^2/M$  est l'ensemble des droites parallèles à  $M$ .

**Definition B.1.18** (application quotient). Supposons que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur un ensemble  $X$ . On a alors une application surjective

$$q: X \rightarrow X/\sim, \quad q(x) = [x],$$

appelé l'*application quotient* de  $X$  sur  $X/\sim$ .

*Remark B.1.19.* Notez que si  $q: X \rightarrow X/\sim$  est l'application quotient correspondant à une relation d'équivalence  $\sim$  sur un ensemble  $X$ , alors

$$q(x) = q(y) \iff [x] = [y] \iff x \sim y.$$

Ainsi, toute relation d'équivalence est du type vu dans l'exemple B.1.3.

## Exercices.

B.1.1 ([Ber14, Ex. 2.5.2]). Soit  $X$  l'ensemble de tous les vecteurs non nuls dans  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit,

$$X = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \neq 0\}.$$

Pour  $x, y \in X$ , écrivez  $x \sim y$  si  $x = cy$  pour un  $c$  scalaire. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur  $X$ .

## B.2 espaces vectoriels quotients

Dans ce cours, le quotient le plus important sera  $V/M$  pour un sous-espace  $M$  d'un espace vectoriel  $V$ . L'une des raisons en est que, dans ce cas, l'ensemble de quotients est plus qu'un simple *ensemble* : c'est un espace vectoriel.

Tout d'abord, nous devons définir l'addition vectoriel et la multiplication scalaire. Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  et que  $M$  est un sous-espace de  $V$ . Pour  $x + M, y + M \in V/M$ , nous définissons leur somme comme étant

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M.$$

Cependant, cette définition devrait vous inquiéter. Pourquoi? Notez qu'en général, un élément de  $V/M$  peut être écrit sous la forme  $x + M$  pour plus d'un  $x$ . Puisque notre définition de l'addition vecteur se réfère explicitement à ce  $x$ , notre addition vecteur n'est pas bien définie à moins que nous obtenions que le résultat de notre opération est indépendante du choix de  $x$ . C'est-à-dire si

$$x + M = x' + M \quad \text{et} \quad y + M = y' + M,$$

alors il doit être vrai que

$$(x + M) + (y + M) = (x' + M) + (y' + M).$$

Selon notre définition de l'addition, ceci est vrai si et seulement si

$$(x + y) + M = (x' + y') + M.$$

Vérifions cela. Puisque  $x + M = x' + M$ , nous avons  $x - x' \in M$ . De même, puisque  $y + M = y' + M$ , nous avons  $y - y' \in M$ . Ainsi

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in M,$$

puisque  $M$  est un sous-espace de  $V$ . On en déduit que  $(x + y) + M = (x' + y') + M$  comme souhaité.

Nous définissons maintenant la multiplication scalaire sur  $V/M$  par la formule

$$c(x + M) = cx + M, \quad c \in F, \quad x \in V.$$

Encore une fois, nous devons vérifier que cela est bien défini. En particulier, nous devons vérifier que si  $x + M = x' + M$ , alors  $cx + M = cx' + M$ . Pour voir cela, notez que  $x + M = x' + M$  implique  $x - x' \in M$ . Ainsi  $c(x - x') \in M$  puisque  $M$  est un sous-espace (et donc fermé par multiplication scalaire). Ainsi  $cx + M = cx' + M$  comme souhaité.

Maintenant que nous avons défini une addition et une multiplication scalaire, nous pouvons prouver le théorème suivant.

**Theorem B.2.1.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $F$  et que  $M$  est un sous-espace de  $V$ . Alors, sous les opérations définies ci-dessus,  $V/M$  est un espace vectoriel sur  $F$  et l'application quotient*

$$Q: V \rightarrow V/M, \quad Q(x) = x + M,$$

*est une application linéaire avec  $\text{Ker } Q = M$ . L'espace vectoriel  $V/M$  est appelé l'espace vectoriel quotient de  $V$  par le sous-espace  $M$ .*

*Démonstration.* Nous devons vérifier que nos opérations satisfont les axiomes de la Définition 1.2.1. Pour  $x + M, y + M, z + M \in V/M$ , nous avons

$$\begin{aligned} & ((x + M) + (y + M)) + (z + M) = ((x + y) + M) + (z + M) \\ & = (x + y + z) + M = (x + M) + ((y + z) + M) = (x + M) + ((y + M) + (z + M)), \end{aligned}$$

donc l'addition est associative. De façon similaire

$$\begin{aligned} (x + M) + (y + M) &= (x + y) + M = (y + x) + M = (y + M) + (x + M), \text{ et} \\ (x + M) + (\mathbf{0} + M) &= (x + \mathbf{0}) + M = x + M. \end{aligned}$$

Ainsi l'addition est commutative et  $\mathbf{0} + M = M$  est un neutre additif.

Pour tout  $x + M \in V/M$ , nous avons

$$(x + M) + (-x + M) = (x - x) + M = \mathbf{0} + M,$$

et donc chaque élément de  $V/M$  a un inverse additif. Nous le laissons en exercice (Exercice B.2.1) la vérification des axiomes restants dans la définition d'un espace vectoriel.

Pour vérifier que l'application quotient  $Q$  est linéaire, supposons  $u, v \in V$  et  $c \in F$ . Alors

$$\begin{aligned} Q(u + v) &= (u + v) + M = (u + M) + (v + M) = Q(u) + Q(v), \\ Q(cv) &= cv + M = c(v + M). \end{aligned}$$

□

## Exercises.

B.2.1. Compléter la preuve du Théorème B.2.1 en montrant que  $V/M$  satisfait les axiomes restants d'un espace vectoriel.

B.2.2 ([Ber14, Ex. 2.6.1]). Prouver que si  $V = M \oplus N$ , alors  $V/M \cong N$ . *Indice* : Restreindre l'application quotient  $V \rightarrow V/M$  à  $N$  et trouver le noyau et l'image d'application quotient restreinte.

## B.3 Le premier théorème d'isomorphisme

**Lemma B.3.1.** *Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors*

$$T^{-1}(\{Tv\}) = v + \text{Ker } T, \quad \text{pour tous } v \in V.$$

*Démonstration.* Supposons  $u \in T^{-1}(\{Tv\})$ . Alors

$$Tu = Tv \implies Tu - Tv = \mathbf{0} \implies T(u - v) = \mathbf{0} \implies u - v \in \text{Ker } T \implies u \in v + \text{Ker } T.$$

Supposons maintenant que  $u \in v + \text{Ker } T$ . Alors

$$u - v \in \text{Ker } T \implies T(u - v) = \mathbf{0} \implies Tu - Tv = \{\mathbf{0}\} \implies Tu = Tv \implies u \in T^{-1}(\{Tv\}).$$

□

**Theorem B.3.2** (Premier théorème d'isomorphisme). *Supposons que  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire et  $N = \text{Ker } T$ . Alors*

- (a)  $N$  est un sous-espace de  $V$ ,
- (b)  $T(V)$  est un sous-espace de  $W$ , et
- (c) L'application  $V/N \rightarrow T(V)$  donnée par  $v + N \mapsto Tv$  est un isomorphisme. Ainsi,  $V/N \cong T(V)$ .

Autrement dit,

$$V/\text{Ker } T \cong \text{Im } T$$

pour chaque application linéaire  $T$  de domaine  $V$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà prouvé (a) et (b) (voir Corollaire 2.2.4). Il reste donc à prouver (c).

Nous devons trouver une application linéaire bijective  $S: V/N \rightarrow T(V)$ . Supposons  $x \in V/N$ . Alors  $x$  est un sous-ensemble de  $V$  et est égal à  $v + N$  pour certains  $v \in V$ . D'après le lemme B.3.1,  $T$  est constant sur le sous-ensemble  $x$ . On peut ainsi définir une application

$$S: V/N \rightarrow T(V), \quad S(v + N) = Tv.$$

Notez que l'application  $S$  n'est bien définie que par les commentaires ci-dessus. Nous montrons d'abord que  $S$  est linéaire. Supposons que  $x, y \in V/N$  et  $c$  soient un scalaire. Ainsi  $x = u + N$  et  $y = v + N$  pour des  $u, v \in V$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} S(x + y) &= S(u + v + N) = T(u + v) = Tu + Tv = S(u + N) + S(v + N) = S(x) + S(y), \\ S(cx) &= S(cu + N) = T(cu) = cTu = cS(u + N) = cS(x). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $S$  est bijectif. Il est clairement surjectif puisque tout élément de  $T(V)$  est de la forme  $Tv$  pour certains  $v \in V$  et on a  $S(v + N) = Tv$ . Puisque  $S$  est linéaire, nous pouvons montrer qu'il est injectif en prouvant que  $\text{Ker } S = \{\mathbf{0}\}$ . Maintenant, si  $x = u + N \in \text{Ker } S$ , alors

$$S(u + N) = \mathbf{0} \implies Tu = \mathbf{0} \implies u \in \text{Ker } T \implies u + N = N,$$

qui est le vecteur zéro de  $V/N$ . □

*Remark B.3.3.* L'une des principales utilisations du premier théorème d'isomorphisme est la suivante. Si nous voulons prouver que  $V/U \cong W$  (où  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels et  $U$  est un sous-espace de  $V$ ), alors nous pouvons le faire en trouvant une application linéaire surjective de  $V$  dans  $W$  dont le noyau est  $U$ .

*Exemple B.3.4.* Soit

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0\}.$$

Prouver que  $\mathbb{R}^4/U \cong \mathbb{R}^2$ .

Nous devons trouver une application surjective  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $U = \text{Ker } T$ . Let

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4).$$

Il s'agit d'une application linéaire puisqu'elle correspond à la multiplication par la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Elle est surjective puisque pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$T\left(\frac{a}{2}, 0, 0, \frac{a}{2} - b\right) = (a, b).$$

(Rappeler MAT 1741, montrer que  $T$  est surjectif équivaut à montrer que la matrice ci-dessus est de rang 2). Il est clair que  $\text{Ker } T = U$ . Ainsi  $\mathbb{R}^4/U \cong \mathbb{R}^2$  par le premier théorème d'isomorphisme.

*Exemple B.3.5.* Soit  $X$  un ensemble et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . Soit  $F$  un corps et définissons

$$W = \{f \in \mathcal{F}(X, F) \mid f(x) = 0 \text{ pour tous } x \in Y\}.$$

Prouvons que  $\mathcal{F}(X, F)/W \cong \mathcal{F}(Y, F)$ .

Tout d'abord, cela n'a de sens d'écrire  $\mathcal{F}(X, F)/W$  que si  $W$  est un sous-espace de  $\mathcal{F}(X, F)$ . Nous laissons en exercice (Exercice 1.5.9) la preuve que c'est bien le cas.

Nous voulons trouver une application surjective  $T: \mathcal{F}(X, F) \rightarrow \mathcal{F}(Y, F)$  telle que  $\text{Ker } T = W$ . Définissons  $T$  par

$$T(f) = f|_Y.$$

C'est à dire,  $T$  restreint une fonction à  $Y$ . Cette application est linéaire (Exercice B.3.1). Il est clair que  $\text{Ker } T = W$ . De plus,  $T$  est surjectif puisque, étant donné toute fonction  $f$  à valeur dans  $F$  sur  $Y$ , nous pouvons l'étendre à une fonction  $g$  sur tout  $X$  en lui donnant les valeurs que nous voulons sur les points de  $X \setminus Y$ , et on aura  $T(g) = f$ . Ainsi, par le premier théorème d'isomorphisme, nous avons  $\mathcal{F}(X, F)/W \cong \mathcal{F}(Y, F)$ .

## Exercices.

B.3.1. Démontrer que l'application  $T$  de l'exemple B.3.5 est linéaire.

B.3.2. (a) Soient  $S: U \rightarrow V$  et  $T: V \rightarrow W$  des applications linéaires. Montrez que  $\text{Ker}(TS) = S^{-1}(\text{Ker } T)$ .



- (b) Soit  $S: V \rightarrow W$  une application linéaire surjective et  $M$  un sous-espace de  $W$ . Montrez que  $V/S^{-1}(M) \cong W/M$ . *Indice* : Appliquez part (a) à  $S: V \rightarrow W$  et  $Q: W \rightarrow W/M$ .

B.3.3 ([Ber14, Ex. 2.7.2]). Soit  $M, N$  des sous-espaces des espaces vectoriels  $V, W$  (respectivement), et soit

$$T: V \times W \rightarrow (V/M) \times (W/N)$$

l'application linéaire définie par  $T(x, y) = (x + M, y + N)$ . Trouvez le noyau de  $T$  et prouvez que

$$(V \times W)/(M \times N) \cong (V/M) \times (W/N).$$

B.3.4 ([Ber14, Ex. 2.7.4]). Soit  $V$  un espace vectoriel,  $V \times V$  l'espace vectoriel produit, et

$$\Delta = \{(v, v) \mid v \in V\} \subseteq V \times V.$$

(L'ensemble  $\Delta$  est appelé la *diagonale* de  $V \times V$ .) Prouver que  $\Delta$  est un sous-espace de  $V \times V$  et que  $(V \times V)/\Delta \cong V$ . *Indice* : Voir Exercice 2.2.8.

## B.4 Une autre preuve du théorème du rang

Nous utilisons maintenant des espaces quotients pour donner une preuve alternative du théorème du rang (théorème 3.5.1).

**Theorem B.4.1.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Soit  $1 \leq r < n$ , soit  $M = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ , et soit  $Q: V \rightarrow V/M$  l'application quotient. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants dans  $V$ ,  
 (b)  $Qv_1, \dots, Qv_r$  sont indépendants dans  $V/M$  et  $v_{r+1}, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants dans  $V$ .

*Démonstration.* (a)  $\implies$  (b) :  $v_{r+1}, \dots, v_n$  sont clairement indépendants puisque  $v_1, \dots, v_n$  le sont (tout sous-ensemble d'un ensemble indépendant est indépendant). Il reste donc à montrer que  $Qv_1, \dots, Qv_n$  sont indépendants. Supposer

$$c_1(Qv_1) + \dots + c_r(Qv_r) = Q\mathbf{0}$$

(Rappelons que  $Q\mathbf{0} = M$  est le vecteur zéro de  $V/M$ .) Nous devons montrer que  $c_1 = \dots = c_r = 0$ . Puisque  $Q$  est linéaire, nous avons

$$Q(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = Q\mathbf{0},$$

et donc

$$c_1v_1 + \dots + c_nv_n \in \text{Ker } Q = M.$$

Comme  $M = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ , on a donc

$$c_1v_1 + \dots + c_nv_n = c_{r+1}v_{r+1} + \dots + c_nv_n,$$

pour certains scalaires  $c_{r+1}, \dots, c_n$ . Alors

$$c_1 v_1 + \dots + c_r v_r + (-c_{r+1}) v_{r+1} + \dots + (-c_n) v_n = \mathbf{0}.$$

Puisque  $v_1, \dots, v_n$  sont indépendants, nous avons que tous les coefficients sont nuls.

(b)  $\implies$  (a) : supposons

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}. \quad (\text{B.1})$$

Nous voulons montrer  $c_1 = \dots = c_n = 0$ . Soit

$$z = c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n.$$

comme  $z \in M = \text{Ker } Q$ . Par conséquent,

$$Q\mathbf{0} = c_1(Qv_1) + \dots + c_r(Qv_r) + Qz = c_1(Qv_1) + \dots + c_r(Qv_r).$$

Puisque  $Qv_1, \dots, Qv_r$  sont indépendants, nous avons  $c_1 = \dots = c_r = 0$ . Mais alors B.1 devient

$$c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}.$$

Puisque  $v_{r+1}, \dots, v_n$  est linéairement indépendant, nous avons  $c_{r+1} = \dots = c_n = 0$ . Par conséquent, tous les  $c_i$  sont nuls.  $\square$

**Theorem B.4.2.** *Supposons que  $V$  est un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Soit  $1 \leq r < n$ , soit  $M = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ , et soit  $Q: V \rightarrow V/M$  l'application quotient. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a)  $v_1, \dots, v_n$  engendrent  $V$ ,
- (b)  $Qv_1, \dots, Qv_r$  engendrent  $V/M$ .

*Démonstration.* (a)  $\implies$  (b) : supposons  $u \in V/M$ . Nous voulons montrer que nous pouvons écrire  $u$  comme une combinaison linéaire de  $Qv_1, \dots, Qv_n$ . Puisque  $Q$  est surjectif, il existe un  $v \in V$  tel que  $u = Qv$ . Puisque  $v_1, \dots, v_n$  engendrent  $V$ , nous avons

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

pour certains scalaires  $c_1, \dots, c_n$ . Nous appliquons l'application linéaire  $Q$  aux deux côtés et utilisons le fait que  $Qv_{r+1} = \dots = Qv_n = Q\mathbf{0}$  (depuis  $M = \text{Ker } Q$ ) pour obtenir

$$u = Qv = c_1 Qv_1 + \dots + c_r Qv_r.$$

(b)  $\implies$  (a) : supposons  $v \in V$ . Nous voulons montrer que nous pouvons écrire  $v$  comme une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_n$ . Puisque  $Qv_1, \dots, Qv_r$  engendrent  $V/M$ , nous avons

$$Qv = c_1(Qv_1) + \dots + c_r(Qv_r)$$

pour certains scalaires  $c_1, \dots, c_r$ . Ainsi

$$v - (c_1 v_1 + \dots + c_r v_r) \in \text{Ker } Q = M,$$

et donc

$$v - (c_1 v_1 + \dots + c_r v_r) = c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n$$

pour certains scalaires  $c_{r+1}, \dots, c_n$ . Par conséquent,  $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ .  $\square$

**Theorem B.4.3.** *Si  $V$  est un espace vectoriel et  $M$  est un sous-espace de  $V$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $V$  est de dimension finie,
- (b)  $M$  et  $V/M$  sont de dimension finie.

Lorsque ces conditions sont remplies, nous avons

$$\dim V = \dim(V/M) + \dim M. \quad (\text{B.2})$$

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) : Supposons que  $V$  est de dimension finie. Alors  $M$  est de dimension finie par le théorème 3.4.21 et  $V/M$  est de dimension finie en appliquant le théorème 3.3.7 à l'application de quotient  $Q: V \rightarrow V/M$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Si  $M = V$ , l'implication est triviale. De plus,  $V/M = V/V$  se compose du classe d'équivalence unique  $\mathbf{0} + V = V$  et donc  $V/V$  est l'espace vectoriel nul. Ainsi B.2 devient

$$\dim V = 0 + \dim V,$$

ce qui est évidemment vrai.

Si  $M = \{\mathbf{0}\}$ , alors l'application quotient  $V \rightarrow V/M$  est une surjection linéaire à noyau nul. C'est donc un isomorphisme et donc  $V \cong V/M$ . Ainsi  $V$  est de dimension finie car  $V/M$  l'est. De plus, B.2 devient

$$\dim V = \dim(V/\{\mathbf{0}\}) + 0 = \dim V + 0,$$

ce qui est clairement vrai.

Supposons maintenant  $M \neq \{\mathbf{0}\}$  et  $M \neq V$ . Choisissez une base  $x_1, \dots, x_m$  de  $M$  et  $u_1, \dots, u_r$  de  $V/M$  (on peut le faire puisque, par hypothèse,  $M$  et  $V/M$  sont de dimension finie). Choisissez  $y_k \in V$  tel que  $u_k = y_k + M$ ,  $1 \leq k \leq r$ . Alors, par Théorème B.4.2, la liste

$$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r$$

engendre  $V$ . De plus, cette liste est indépendante par Théorème B.4.1. Par conséquent, c'est une base de  $V$ . Il s'ensuit que  $V$  est de dimension finie et

$$\dim V = m + r = \dim M + \dim V/M. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant donner une preuve alternative du théorème du rang.

*Preuve alternative du théorème 3.5.1.* Puisque  $V$  est de dimension finie, son image  $T(V)$  l'est aussi ( $T$  est une surjection sur son image, et nous appliquons le théorème 3.3.7) et le sous-espace  $\text{Ker } T$  aussi (par Théorème 3.4.21). Par le premier théorème d'isomorphisme,  $T(V) \cong V/\text{Ker } T$ . Ainsi

$$\dim T(V) = \dim(V/\text{Ker } T).$$

Maintenant, par le théorème B.4.3, nous avons  $\dim T(V) = \dim V - \dim(\text{Ker } T)$ . Le résultat suit.  $\square$

# Index

- addition vectoriel, 7
- adjoint, 103
- $A_{ij}$ , 82
- algorithme
  - de Gram-Schmidt, 95
- algorithme de Gram-Schmidt, 95
- algébriquement clos, 115
- anneau, 139
- anneau commutatif, 139
- annihilateur, 61
- Annulation dans les espace vectoriels, 12
- anti-symétrique, 85
- application composée, 31
- application identité, 29
- application linéaire, 22
- Application linéaire scalaire, 29
- application multilinéaire, 79
- Application nulle, 29
- application quotient, 148
- associative, 129
- auto-adjointe, 116
  
- base, 47
  - canonique, 47
  - naturelle, 47
  - standard, 47
- base canonique, 47
- base dual, 59, 60
- base naturelle, 47
- base standard, 29, 47
- bilinéaire, 79
  
- $C^\infty(\mathbb{R})$ , 9
- classe d'équivalence, 144
- classe d'équivalence, 145
- coefficient, 14
- Coefficients de Fourier, 98
- cofacteur, 82
  
- Combinaison linéaire, 14
- commutative, 129
- composition, 31
- congru, 144
- congruence modulo  $n$ , 143
- conjugué, 118
- coordonnée, 66
- coordonnées, 47
- corps, 5, 6, 138
  - fini, 5
- corps fini, 5
  
- diagonalisable, 107
- diagonalisé orthogonalement, 121
- dimension, 50
- dimension finie, 50
- dimension infiniex, 50
- distance, 125
- distributivité, 7, 139
- dual, 59
  - base, 60
- dépendant
  - linéairement, 40
- dépendent
  - linéairement, 43
- déterminant, 82
- développement en cofacteur, 82
  
- $e_i$ , 15
- engendre, 39
- équivalent, 143
- espace dual, 25
- espace propre, 109
- Espace pré-euclidien, 91
- espace vectoriel, 7
  - complexe, 8
  - réel, 8
- Espace vectoriel finiment engendré, 45

- Espace vectoriel produit, 10
- $F^X$ , 8
- $F^\times$ , 6
- $\mathbb{F}_2$ , 6
- $\mathbb{F}_p$ , 5
- $\mathcal{F}(F)$ , 8
- $\mathcal{F}(X, F)$ , 8
- finiment engendré
  - espace vectoriel, 45
- $F^n$ , 8
- fonction  $i$ -ème coordonnée, 60
- fonction coordonnée, 66
- fonction d'onde, 14
- fonction paire, 20
- fonction polynomial, 10
- fonction polynômes, 36
- fondamental de l'algèbre, 115
- forme bilinéaire, 80
- Forme linéaire, 29
- forme linéaire, 25, 80
- fonction impaire, 20
  
- génératrice
  - partie, 39
  
- Identité de polarisation, 92
- Im, 27
- image, 26, 27
- image directe, 26
- image inverse, 26
- impaire, 20
- indépendant
  - linéairement, 40
- indépendent
  - linéairement, 43
- indéterminé, 10
- intersection, 17
- inverse, 35, 132
- inverse additif, 7
- inverse multiplicatif, 138
- inégalité
  - de Cauchy-Schwartz, 92
  - triangulaire, 93
- Inégalité de Bessel, 102
- Inégalité de Cauchy-Schwartz, 92
  
- inégalité triangulaire, 93
- isometrie, 105
- isomorphisme, 33
  
- Ker, 27
  
- $\mathcal{L}(V)$ , 29
- $\mathcal{L}(V, W)$ , 29
- l'espace des colonnes, 66
- l'espace des lignes, 77
- l'inverse additif, 138
- lemme
  - de Zorn, 48
- linéaire
  - application, 22
- Linéairement dépendant
  - ensemble, 43
- linéairement dépendant, 40
- Linéairement indépendant
  - ensemble, 43
- linéairement indépendant, 40
- loi de modularité, 20
  
- $M_n(\mathbb{R})$ , 140
- $M_{m,n}(F)$ , 8
- magma, 128
- matrice, 65
  - d'une application linéaire, 65
  - de changement de base, 70
  - orthogonale, 98
- matrice de changement de base, 70
- matrice orthogonal, 89
- matrice standard, 29
- matrice élémentaire, 74
- matrices similaires, 71
- $M_i(a)$ , 74
- monoïde, 134
  - additif, 135
- monoïde additif, 135
- Multiplication point par point, 8
- multiplication scalaire, 7
- multiplicité algébrique, 112
- multiplicité géométrique, 112
  
- $\mathbb{N}$ , 4, 128
- neutre additif, 138

- neutre multiplicatif, 138
- nilpotente, 88
- norme, 92
- norme d'un nombre complexe, 118
- noyaux, 27, 78
- nullité, 55
  
- operation, 128
- opposé, 7
- opérations élémentaire sur les colonnes., 73
- opérations élémentaire sur les lignes, 73
- orthogonal, 94
  - matrice, 98
  - transformation, 105
- orthonormée, 94
  
- paire, 20
- parenthèses, 129
- partie génératrice, 39
- partition, 146
- $P_{i,j}$ , 74
- pivot de Gauss, 73
- polynome caractéristique, 110
- polynôme, 14
- polynômes, 10, 36
- pre-image, 26
- principe de superposition, 14
- produit scalaire canonique, 91
- projection, 95, 101
- projection orthogonal, 95
- projection orthogonale, 101
- puissances d'une application, 31
  
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , 6
- quotient, 148, 149
  
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , 6
- rang, 55
  - d'une matrice, 75
- reflexivité, 143
- relation d'équivalence, 143
- relation linéaire, 40
- Règle du parallélogramme, 92
- réciproque, 35
  
- Span, 14
  
- scalaire, 8
- similaires
  - matrices, 71
- somme de sous-ensemble, 17
- somme direct, 18
- sous-corps, 5
- Sous-espace, 16
- sous-espace
  - trivial, 16
- sous-espace engendré, 14
- Soustraction
  - de vecteurs, 13
- soustraction
  - dans un corps, 141
- span, 38
- Suites, 10
- supplémentaire orthogonal, 98
- supplémentaire, 19
  - orthogonale, 98
- symbole delta de Kronecker, 59
- symétrie, 143
- symétrique, 116
  
- $[T]_B^D$ , 65
- teste de diagonalisabilité, 114
- Théorème de la dimension, 54
- Théorème de représentation de Riesz, 99
- théorème du rang, 55
- trace, 69, 81
- trans-conjugué, 118
- transformation euclidienne, 125
- transitivité, 143
- translation, 13
- translation, 126
- Transposée
  - d'une application linéaire, 61
- transposée
  - d'une matrice, 69
- un déterminant de Vandermonde, 85
  
- valeur propre, 108
- vecteur, 7
- vecteur nul, 7
- vecteur propre, 107, 108
- vecteur unité, 94

Zorn

lemme de, [48](#)

échelonnée, [74](#)

égalité de fonctions, [8](#), [136](#)

élément inversible, [132](#)

élément neutres, [131](#)

# Bibliographie

- [Ber14] Sterling K. Berberian. *Linear algebra*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2014. Reprint of the 1992 original, with a new errata and comments.
- [Sav] Alistair Savage. Raisonement mathematiques & preuves. Notes pour MAT 1762. Disponible à [https://alistairsavage.ca/mat1362/notes/MAT1762-Raisonement\\_mathematiques\\_et\\_preuves.pdf](https://alistairsavage.ca/mat1362/notes/MAT1762-Raisonement_mathematiques_et_preuves.pdf).
- [Tre] Sergei Treil. *Linear algebra done wrong*. Disponible à <http://www.math.brown.edu/~treil/papers/LADW/LADW.html>.