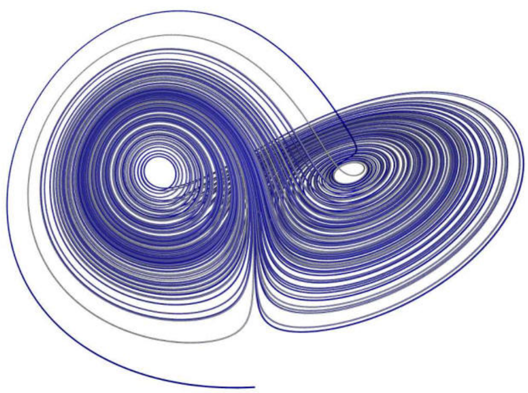
Analyse Réelle

MAT 3520

Automne 2016



Alistair Savage

Département de Mathématiques et de Statistique

Université d'Ottawa

Table des matières

Préface **iii**

1 Espaces métriques **1**
- 1.1 Définitions et exemples . . . 1
- 1.2 Convergence dans un espace métrique . . . 12
- 1.3 Suites de fonctions . . . 14
- 1.4 Espaces complets . . . 16
- 1.5 Sous-espaces métriques . . . 22
- 1.6 Fonctions entre les espaces métriques . . . 24

2 Théorème du point fixe **26**
- 2.1 Théorème du point fixe . . . 26
- 2.2 Applications . . . 29

3 Compacité **33**
- 3.1 Espaces séquentiellement compacts . . . 33
- 3.2 Suites de fonctions et le théorème d'Arzelà–Ascoli . . . 36
- 3.3 Compacité et fonctions entres les espaces métriques . . . 41

4 Espaces topologiques **44**
- 4.1 Définitions . . . 44
- 4.2 Ensembles fermés . . . 48
- 4.3 Espaces métriques séparables . . . 54
- 4.4 Connexité . . . 57
- 4.5 Ensembles compacts . . . 60
- 4.6 Continuité . . . 65
- 4.7 Connexité par arcs . . . 68
- 4.8 Isométries, plongements isométriques, et complétés . . . 71

5 Espaces vectoriels normés **76**
- 5.1 Définitions et exemples . . . 76
- 5.2 Convergence dans les espaces vectoriels normés . . . 81
- 5.3 Espaces normés de dimension finie . . . 85
- 5.4 Théorie de l'approximation . . . 91
- 5.5 L'approximation de Weierstrass . . . 93

6 Fonctions entre des espaces normés **98**
6.1 Opérateurs bornés . . . 98
6.2 Fonctionnelles linéaires et le théorème de Hahn–Banach . . . 105

7 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert **111**
7.1 Espaces préhilbertiens . . . 111
7.2 Espaces de Hilbert . . . 116

Préface

Ce sont les notes pour le cours *Analyse Réelle* (MAT 3520, or sa version anglaise MAT 3120) à l'Université d'Ottawa. Nous supposons que les étudiants ont une connaissance du calcul de plusieurs variables et l'analyse élémentaire, y compris les concepts de supremum, infimum, la topologie de $\mathbb{R}^n$ (y compris la compacité), et la continuité uniforme. Nous supposons également que les étudiants connaissent les suites et séries de fonctions, et la notion de convergence uniforme.

En *Analyse Réelle*, nous explorons l'analyse sur les nombres réels dans un contexte plus général. Nous commençons avec l'idée d'un espace métrique, nous discutons les idées de convergence, des suites, les espaces complets, la continuité, compacité séquentielle, et isométrie. Nous passons ensuite à la situation plus générale d'un espace topologique, ou nous explorons les idées d'ensembles fermés, séparabilité, compacité, continuité, connexité par arcs, et complétés. Dans la deuxième moité du cours, nous voyons l'idée d'un espace vectoriel normé, quelque chose qui est, au même temps, un espace vectoriel et un espace topologique. Nous terminons le cours avec une brève discussion des espaces produits intérieurs est les espaces de Hilbert.

Rmerciements : Des parties de ces notes (en particulier le chapitre 4) son basés sur les notes de cours de Vladimir Pestov. D'autres parties suivent le manuel [Coh03].

Alistair Savage Ottawa, 2016.

Site web du cours : http://alistairsavage.ca/mat3520/

Chapitre 1

Espaces métriques

Dans ce chapitre, nous voyons l'idée d'un espace métrique. Intuitivement, c'est un ensemble avec une bonne notion de distance. Nous allons voir que plusieurs concepts familiers de votre étude de l'analyse dans $\mathbb{R}^n$ peuvent être généralisés aux espaces métriques.

Dans ces notes, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers non-négatifs, et $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entier positifs.

1.1 Définitions et exemples

Dans cette section, nous définissons les espaces métriques et discutons plusieurs exemples. On commence avec la motivation. Vous avez vu dans les cours précédents différentes notions de *convergence*. Par exemple, vous avez vu :

- Convergence des suites de nombres réels.
- Convergence des suites de fonctions (e.g. séries de Taylor) :

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x;$$

  donc la suite de fonctions

  $$1,\ 1+x,\ 1+x+\frac{x^2}{2!}, \dots$$

  converge à la fonction e^x.

Bien que ces deux situations semblent différents (nombres réels par rapport aux fonctions), l'idée est la même. À savoir, les éléments de la suite “se rapprocher”. L'un des principaux objectifs de ce cours sera d'explorer un cadre abstrait dans lequel nous pouvons discuter de la convergence. Les deux exemples ci-dessus devraient être des cas particuliers de notre traitement plus général. Ce dont nous avons besoin est une idée précise de *distance*. Ceci est la motivation pour la définition d'un espace métrique.

Définition 1.1.1 (Espace métrique)**.** Un *espace métrique* est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d est une fonction $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ avec les propriétés suivantes :

(M1) pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (*séparation*),

(M2) pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*),

(M3) pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

La fonction d s'appelle la *métrique* (ou *fonction distance*) pour l'espace. On appelle souvent les éléments de X les *points*.

Remarque 1.1.2. Parfois, la notation r ou ρ (lettre grecque "rho") est utilisée au lieu de d.

Remarque 1.1.3. Il est possible de définir de nombreux métriques différents sur un ensemble X. Un espace métrique est l'ensemble X *avec* la métrique d. Cependant, si la métrique est claire à partir du contexte (par exemple, si nous travaillons avec un ensemble X sur lequel nous fixons une métrique d, et ne jamais travaille avec un autre), alors nous parfois référerons à l'ensemble X lui-même comme un espace métrique, en laissant la métrique d inférée.

Remarque 1.1.4. En réalité, le fait que d prends des valeurs *non-négatives* suit des axiomes. Si $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ est une fonction *quelconque* qui satisfait (M1)–(M3), alors

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \implies d(x, y) \geq 0,$$

pour tous $x, y \in X$.

Exemple 1.1.5 (Métrique usuelle sur $\mathbb{R}$). Si X est un ensemble quelconque de nombres réels (par exemple, si $X = \mathbb{R}$), alors

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

définit une métrique sur X. Cette métrique s'appelle la métrique *standard*, *usuelle*, ou *naturelle* sur tel ensemble X. Quand nous appelons $\mathbb{R}$ un espace métrique, sans spécifier la métrique, nous supposons que nous utilisons la métrique usuelle.

Définition 1.1.6 (Sous-espace métrique)**.** Supposons que (X, d) est un espace métrique et que Y est une partie non vide de X. Soit $d|_Y$ la restriction de d à Y (c.-à-d. la restriction de la fonction d à $Y \times Y$). À savoir, pour tous $y, z \in Y$,

$$d|_Y(y, z) = d(y, z).$$

Alors $(Y, d|_Y)$ est un espace métrique, appelé un *sous-espace !métrique* de (X, d). La métrique $d|_Y$ est appelée la *métrique induite*.

Exemple 1.1.7. On a déjà vu un exemple d'une métrique induite quand nous avons défini la métrique usuelle sur un espace *quelconque* de $\mathbb{R}$. On définit une métrique sur $\mathbb{R}$ et donc nous avons défini la métrique induite sur n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$, tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$, etc.

On reviendra au sujet des sous-espaces métriques dans plus de détails un peu plus tard.

Exemple 1.1.8 (Métrique discrète). Pour un ensemble non vide quelconque X, nous pouvons définir la *métrique discrète* (ou *métrique 0-1*) par

$$d_{0-1}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Exemple 1.1.9 (Métrique euclidienne). Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ et définissons d par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{pour } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

C'est la définition usuelle de la distance entre deux points dans le plan et l'axiome (M3) est l'inégalité triangulaire usuelle.

Plus général, sur $\mathbb{R}^n$ définissons d par

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \quad \text{pour } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nous allons démontrer que cela définit une métrique sur $\mathbb{R}^n$, appelée la *métrique euclidienne*.

Quand nous appelons $\mathbb{R}^n$ un espace métrique, nous supposons que nous utilisons la métrique euclidienne. L'espace métrique $\mathbb{R}^n$ (avec cette métrique) s'appelle . Notez que le cas $n = 1$ est la métrique de l'exemple 1.1.5 et le cas $n = 2$ est la métrique définie ci-dessus.

Il est facile à voir que les axiomes (M1) et (M2) sont satisfaits par la métrique euclidienne. Pour démontrer que (M3) est aussi satisfait, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.1.10 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). *Soient* $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. *Alors*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right). \tag{1.1}$$

Démonstration. Définisons la fonction $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n} (a_k u + b_k)^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\psi(u) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) u^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right) u + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Notez que $\psi(u)$ est sous la forme $Au^2 + 2Bu + C$, où

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Puisque $\psi(u)$ est une somme des carrés, nous avons $\psi(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc, parce que ψ est un polynôme en u de degré au plus deux, le graphe de ψ est une parabole tournée vers le haut qui peut avoir au plus un zéro. Par conséquent, le discriminant ne peut pas être positif. Donc,

$$(2B)^2 - 4AC \leq 0 \implies B^2 - AC \leq 0 \implies \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0. \quad \square$$

Proposition 1.1.11. *Si $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{1.2}$$

Démonstration. Premièrement, nous prenons les racines carrées des deux côtés de l'inégalité Cauchy–Schwarz (1.1) et nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2.$$

En prennent les racines carrées des deux côtes, nous obtenons l'inégalité (1.2). □

Corollaire 1.1.12. *La métrique euclidienne satisfait l'inégalité* (M3) *et, par conséquent, est vraiment une métrique sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On prend $a_k = x_k - y_k$ et $b_k = y_k - z_k$ dans la proposition 1.1.11. □

Exemple 1.1.13 (Métrique ℓ^p sur $\mathbb{R}^n$). Il est possible de généraliser la métrique euclidienne et définir une famille de métriques d_p, $p \geq 1$, sur $\mathbb{R}^n$ par

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Cela s'appelle la *métrique* ℓ^p sur $\mathbb{R}^n$. On peut démontrer que (1.3) définit une métrique, mais la vérification de (M3) est plus difficile (c'est *l'inégalité Hölder*). Notez que d_2 est simplement la métrique euclidienne.

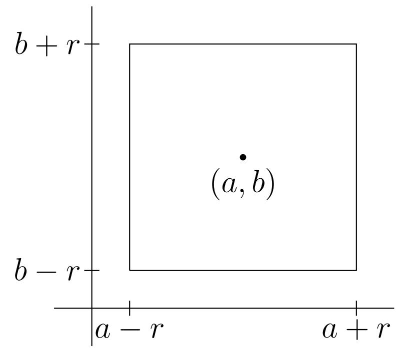
Exemple 1.1.14 (Métrique ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^n$). Nous pouvons considérer le cas limite $p \to \infty$ de la métrique ℓ^p. À savoir, définissons la *métrique* ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$d_\infty(x, y) = \max_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

Voyez les exercises 1.1.8 et 1.1.9.

Pour souligner le fait que nous devons faire attention avec l'intuition dans un espace métrique général, considérez le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de rayon r et centre (a, b) quand nous utilisons la métrique d_∞. C'est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty((a, b), (x, y)) = r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x - a|, |y - b|\} = r\}.$$



Donc, notre "cercle" est vraiment un carré !

Exemple 1.1.15 (La métrique ℓ^p et la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^n$). On peut définir la métrique ℓ^p, notée d_p, $p \geq 1$, sur $\mathbb{C}^n$ par exactement la même formule (1.3). Dans le cas où $p = 2$, nous le dénotons simplement par d,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Cela s'appelle le *métrique euclidienne* sur $\mathbb{C}^n$. Quand nous appelons $\mathbb{C}^n$ un espace métrique, nous supposons que nous utilisons cette métrique.

Remarque 1.1.16. Normalement, le terme *espace euclidien* fait référence à $\mathbb{R}^n$ avec la métrique usuelle, et pas $\mathbb{C}^n$.

Remarque 1.1.17. Il est important de se rappeler que, dans un espace métrique abstrait, nous avons *seulement* le concept de distance, et il n'y a aucune structure additionnelle comme addition, multiplication, etc. Alors que certains de nos exemples (comme $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$) ont telle structure, ce sont des cas spéciaux. Il faut résister additionner ou soustraire les points dans les espace métrique généraux.

Nous pouvons essayer de généraliser notre exemple de $\mathbb{C}^n$ avec la métrique euclidienne en prennent $n \to \infty$ (alors des n-uplet deviennent les suites). La métrique euclidienne deviennent une suite infinie et il faut faire attention à la convergence.

Définition 1.1.18 (Espace ℓ^2)**.** Nous dénotons par ℓ^2 l'ensemble des suites complexes $x_1, x_2, \ldots$ pour lesquelles la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converge. Nous définissons une métrique sur ℓ^2 par

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2},$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Nous dénotons aussi l'espace métrique lui-même par ℓ^2.

Pour que notre définition soit valable, nous devons montrer que la somme infinie définissant $d(x, y)$ converge pour tous $x, y \in \ell^2$ et que d satisfait les axiomes d'une métrique.

Premièrement, nous montrons que $d(x, y)$ est toujours finie pour tous $x, y \in \ell^2$. On a

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2},$$

où, dans la première inégalité, nous avons utilisé le fait que $|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ pour tout k (c'est l'inégalité triangulaire dans l'espace euclidien de dimension 1) et, dans la deuxième inégalité, nous avons pris $a_k = |x_k|$, $b_k = |y_k|$ dans la proposition 1.1.11. Sur la côté droite, nous avons les sommes partielles des séries $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$. Ces séries convergent puisque ce sont précisément les conditions que $x, y \in \ell^2$. Parce que les termes de ces séries sont non-négatifs, nous avons

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}.$$

Cela montre que les sommes partielles de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2$ forment une suite bornée. Cette suite de sommes partielles augmente puisque chacun des termes $|x_k - y_k| \geq 0$. Ainsi, la série converge et nous avons que

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}.$$

Donc $d(x, y)$ est finie.

Maintenant, il faut vérifier que d est une métrique (c.-à-d. qu'il satisfait les axiomes (M1)–(M3)). Les axiomes (M1) et (M2) sont évidents. Donc, il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Supposons que $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots), z = (z_1, z_2, \dots) \in \ell^2$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ (espace euclidien), nous avons

$$|x_k - z_k| = |(x_k - y_k) + (y_k - z_k)| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|.$$

Ainsi,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k - y_k| + |y_k - z_k|\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^2}$$

en prenant $a_k = |x_k - y_k|$ et $b_k = |y_k - z_k|$ dans la proposition 1.1.11. Alors, par le même argument que ci-dessus, nous avons

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - z_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|^2},$$

qui est précisément l'énoncé $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.1.19 (Espace ℓ^p)**.** Pour $p \geq 1$, dénotons par ℓ^p l'ensemble de toutes les suites complexes $x_1, x_2, \dots$ pour lesquelles la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge. Définissons une métrique sur ℓ^p par

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p},$$

où $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$. Nous dénotons aussi l'espace métrique lui-même par ℓ^p.

Nous pouvons démontrer que la métrique sur ℓ^p est bien définie (c.-à-d. les sommes impliquées convergent) et satisfait les axiomes (M1)–(M3), mais nous ne le ferons pas dans ce cours.

Remarque 1.1.20. Pourquoi est-ce que nous nous limitons à $p \geq 1$? La raison est que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite pour $0 < p < 1$. Cependant, pour ces valeurs de p,

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$$

(sans la racine $p$ième) définit une métrique.

Remarque 1.1.21. Fixons un nombre naturel n. Notons que si $x = (x_1, x_2, \dots)$ est une suite telle que $x_k = 0$ pour tour $k > n$, alors $x \in \ell^p$ pour tout p. De cette façon, nous pouvons regarder $\mathbb{R}^n$ comme un sous-espace métrique de ℓ^p. La métrique induite est tout simplement la métrique ℓ^p que nous avons défini sur $\mathbb{R}^n$ plus tôt dans l'exemple 1.1.13, d'où la notation. Notez que [Coh03] utilise la notation L_p au lieu de ℓ^p.

Exemple 1.1.22 (Espace ℓ^1). En prenant $p = 1$ dans la définition de l'espace ℓ^1 (la définition 1.1.19), nous voyons que ℓ^1 est l'ensemble de toutes les suites de valeurs complexes $x_1, x_2, \dots$ pour lesquelles la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ converge. La métrique est donnée par

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|.$$

Comme nous avons fait pour $\mathbb{R}^n$, nous pouvons prendre la limite $p \to \infty$ dans la définition de l'espace ℓ^p pour obtenir ce qui suit.

Exemple 1.1.23 (Espace ℓ^∞). Dénotons par ℓ^∞ l'ensemble de toutes les suites bornées de valeurs complexes. (Rappelons qu'une suite (x_n) est *borné* s'il existe un nombre $L \geq 0$ tel que $|x_n| \leq L$ pour tout n.) Puis

$$d(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}_+} |x_n - y_n|$$

est bien définie pour chaque $x, y \in \ell^\infty$ (en raison du fait que x et y sont bornés et donc leur différence est bornée) et nous pouvons vérifier qu'elle définit une métrique sur ℓ^∞. Voyez l'exercice 1.1.13.

Nous considérons maintenant certaines métriques sur les espaces de fonctions. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, soit $C[a,b]$ l'espace de toutes les fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a,b]$.

Exemple 1.1.24 (Métrique uniforme sur $C[a,b]$). Définissons

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C[a,b].$$

Notez que $|x - y|$ est une fonction continue puisque x et y la sont (et la fonction de valeur absolue est continue). Par conséquent, elle atteint un maximum sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Donc, d est bien définie. Elle s'appelle la *métrique uniforme* (ou *métrique sup*) sur $C[a,b]$. Nous vérifions qu'elle est en effet une métrique. Il prend clairement des valeurs non négatives. Il est également clair que $d(x,x) = 0$. Si $x \neq y$, alors il existe un $t_0 \in [a,b]$ tel que $x(t_0) \neq y(t_0)$. Donc

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \ge |x(t_0) - y(t_0)| > 0,$$

puis $d(x,y) \neq 0$. Ainsi (M1) est satisfaite. Il est clair que (M2) est également satisfaite. Il reste à montrer (M3). Supposons que $x, y, z \in C[a,b]$ et $s \in [a,b]$. Puis, d'après l'inégalité triangulaire pour $\mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} |x(s) - z(s)| &\le |x(s) - y(s)| + |y(s) - z(s)| \\ &\le \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$d(x,z) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - z(t)| \le d(x,y) + d(y,z),$$

et donc (M3) est satisfaite. Nous utiliserons simplement la notation $C[a,b]$ pour indiquer l'espace $C[a,b]$ avec cette métrique.

Exemple 1.1.25 (L'espace métrique $C_1[a,b]$). Nous définissons une autre métrique sur l'espace $C[a,b]$ par

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt.$$

Puisque $|x - y|$ est continue dans l'intervalle fermé $[a,b]$, elle est intégrable dans cet intervalle. Donc d est bien définie et prend clairement des valeurs non négatives. Ceci est peut-être notre premier exemple où (M1) n'est pas tout à fait évident. Il est clair que $x = y \implies d(x,y) = 0$, mais l'implication inverse nécessite un argument. Ici, nous devons utiliser le fait que $|x - y|$ est continue. Supposons que $x \neq y$. Alors il existe un $t_0 \in [a,b]$ tel que $x(t_0) \neq y(t_0)$. Soit $\epsilon = |x(t_0) - y(t_0)| > 0$. Alors, puisque $|x - y|$ est continue, il existe un intervalle I contenant t_0 de longueur $\delta > 0$ tel que $|x(t) - y(t)| > \epsilon/2$ pour tout $t \in I$. Alors

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt \ge \delta\epsilon/2 > 0.$$

Donc (M1) est satisfaite. La condition (M2) est claire. Maintenant, supposons que $x, y, z \in C[a,b]$. Alors pour tout $a \le t \le b$, nous avons

$$|x(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(y)|.$$

Ainsi

$$d(x,z) = \int_a^b |x(t) - z(t)|\, dt \le \int_a^b \Big(|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \Big)\, dt$$
$$= \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt + \int_a^b |y(t) - z(t)|\, dt = d(x,y) + d(y,z),$$

et puis (M3) est satisfaite. Nous dénotons l'espace $C[a,b]$ avec cette métrique par $C_1[a,b]$.

Exemple 1.1.26 (L'espace métrique $C_p[a,b]$). Pour $p > 0$, nous pouvons définir une métrique sur $C[a,b]$ par

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt \right)^{1/p}, \quad x, y \in C[a,b].$$

Nous notons $C[a,b]$ avec cette métrique par $C_p[a,b]$. Nous ne montrerons pas que cela est une métrique pour p général. Notez que le cas $p = 1$ est tout simplement l'espace métrique de l'exemple 1.1.25. En outre, l'espace métrique de l'exemple 1.1.24 peut être considéré comme la limite $p \to \infty$ de $C_p[a,b]$. Le fait que le cas $p = 2$ est un espace métrique peut être prouvée en utilisant une version intégrale de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Voyez l'exercice 1.1.14.

Exemple 1.1.27 (L'espace de Baire). Soit $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$ l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres entiers $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in \mathbb{Z}$. Pour $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$, définit

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 2^{-\min\{i \,|\, x_i \neq y_i\}} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par exemple, la distance entre

$$(1,2,3,4,5,\dots,) \quad \text{et} \quad (1,2,3,0,0,0,\dots)$$

est $2^{-4} = 1/16$. Il est facile à voir que les axiomes (M1) et (M2) sont satisfaits. L'inégalité triangulaire (M3) peut être vérifiée comme suit. Supposons que $x, y, z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$. Nous voulons prouver que

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z). \tag{1.4}$$

Si au moins deux des éléments x, y, z sont égaux, alors l'inégalité (1.4) est trivialement satisfaite (vérifier par vous-même). Ainsi, nous pouvons supposer que x, y, z sont tous différents.

Soit i le plus petit nombre naturel tel que $x_j = y_j = z_j$ pour tout $j < i$ tandis que x_i, y_i, z_i ne sont pas tous les trois égaux. Un tel nombre existe d'après notre hypothèse. Il en résulte que $d(x,z) \le 2^{-i}$. Cependant, au moins un des nombres $d(x,y)$ et $d(y,z)$ est exactement égal à 2^{-i} (sinon nous aurions $x_i = y_i = z_i$, ce qui contredit notre choix de i). Ainsi, le numéro sur le côté droit de (1.4) est $\ge 2^{-i}$ et donc (1.4) est satisfaite.

Exercices.

1.1.1. Supposez que X est un ensemble non vide et que d est la métrique discrète sur X. Décrivez les ensembles

$$\{x \in X \mid d(x,y) \le r\}, \quad y \in X, \quad r \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

Indice : Votre réponse devrait dépendre de r.

1.1.2. Quelle est la seule possibilité pour une métrique sur un singleton (un ensemble avec un seul élément) ?

1.1.3. (a) Supposez que (X,d) est une espace métrique et que $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Montrez que αd, définie par

$$(\alpha d)(x,y) = \alpha d(x,y), \quad x,y \in X,$$

est une métrique sur X.

(b) Montrez que, si X est un ensemble avec plus d'un élément, alors il existe un nombre infini de métriques sur X.

1.1.4 ([Coh03, Ex. 2.4(1)]). Si (X,d) est un espace métrique et $x,y,z,u \in X$, montrez que

$$|d(x,z) - d(y,u)| \le d(x,y) + d(z,u).$$

1.1.5 ([Coh03, Ex. 2.4(2)]). Si (X,d) est un espace métrique et $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ $(n \ge 2)$, montrez que

$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n).$$

1.1.6 ([Coh03, Ex. 2.4(3)]). Supposez que d_1 et d_2 sont deux métriques sur le même ensemble X. Montrez que d_3 et d_4, donnés par

$$d_3(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y), \quad x,y \in X,$$
$$d_4(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}, \quad x,y \in X,$$

sont aussi des métriques sur X.

1.1.7. Notez que, quand $p=1$, la métrique définie dans (1.3) devient

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Vérifier que cela définit en effet une métrique sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.8. Justifier l'énoncé à propos des limites dans l'exemple 1.1.14. Plus précisément, montrez que si $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lim_{p \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \right)^{1/p} = \max_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

1.1.9. Vérifier que d_∞ (voir l'exemple 1.1.14) est en effet une métrique sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.10. Montrez que $d(x,y)$, comme définie dans l'exemple 1.1.22, converge pour tous $x, y \in \ell^1$, et que d définit une métrique sur ℓ^1.

1.1.11. Dessinez les ensembles

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_p((0,0),(x,y)) = 1\}$$

pour $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \infty$.

1.1.12. Montrez que ℓ^1 est en effet une espace métrique. À savoir, montrez que cette métrique est bien définie (c.-à-d. la série pertinente converge) et qu'elle satisfait les axiomes (M1)–(M3).

1.1.13. Vérifiez que la métrique de ℓ^∞ (voir l'exemple 1.1.23) satisfait les axiomes (M1)–(M3).

1.1.14 ([Coh03, Ex. 2.4(6)]). Soient f et g les fonctions continues définie sur $[a,b]$.

(a) Dérivez la forme intégrale de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,dt\right)\left(\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,dt\right).$$

(b) Montrez que nous avons égalité si et seulement si $f = \beta g$ pour une constante β.

(c) Utilisez cette inégalité de Cauchy–Schwarz pour déduire l'inégalité triangulaire pour la fonction d de l'exemple 1.1.26 avec $p = 2$.

1.1.15 ([Coh03, Ex. 2.4(7)]). Soit X l'ensemble de tous les fonctions continues définies sur toute la ligne réelle qui prennent la valeur zéro en dehors d'un intervalle (pas nécessairement le même intervalle pour fonctions différentes). Montrez que

$$d(x,y) = \max_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in X,$$

définit une métrique sur X.

1.1.16 ([Coh03, Ex. 2.4(8)]). Fixons $n \in \mathbb{N}_+$, et soit X l'ensemble de toutes les matrices $n \times n$ avec des entrées complexes. Montrez que d_1 et d_2, définies par

$$d_1(A,B) = \max_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq n}} |a_{j,k} - b_{j,k}|, \qquad d_2(A,B) = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{j,k} - b_{j,k}|,$$

où $A = (a_{j,k}), B = (b_{j,k}) \in X$, sont toutes les deux métriques sur X.

1.1.17 ([Coh03, Ex. 2.4(11)]). Soit X un ensemble quelconque et soit $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(a) pour tous $x, y \in X$, nous avons $\rho(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et

(b) $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

Montrez que ρ est une métrique sur X.

1.1.18 ([Coh03, Ex. 2.4(12)]). Nous disons que (X, d) est un *espace semimétrique* si X est un ensemble non vide et d est une fonction $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$, et (M2) et (M3). (En d'autres termes, nous laissons tomber l'exigence "seulement si" dans (M1).) Montrez que (X, d) est un espace semimétrique, mais pas un espace métrique, quand

(a) X est l'ensemble de toutes les fonctions intégrables sur $[a, b]$ et

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt, \quad f, g \in X;$$

(b) X est l'ensemble de toutes les fonctions dérivables sur $[a, b]$ et

$$d(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t) - g'(t)|, \quad f, g \in X.$$

1.2 Convergence dans un espace métrique

Nous avons vu la définition d'un espace métrique et plusieurs exemples. Maintenant, nous considérons l'idée de convergence.

Définition 1.2.1 (Suite)**.** Une *suite* est une fonction dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}_+$ des entiers positifs. Si X est un ensemble, une *suite dans* X est une fonction $\mathbb{N}_+ \to X$. Si (X, d) est un espace métrique, une suite dans (X, d) est une suite dans X.

Puisque beaucoup de nos exemples d'espaces métriques (par exemple, ℓ^p) impliquent des suites, nous adoptons un système de notation pour éviter confondre des suites qui sont des *éléments* d'un espace métrique avec les suites *dans* un espace métrique.

- Nous utilisons la notation $(x_1, x_2, \dots)$ pour dénoter les suites qui sont éléments d'un espace métrique, comme ℓ^p.
- Nous utilisons la notation $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ou $\{x_n\}$ ou $x_1, x_2, \dots$ pour dénoter une suite d'éléments d'un espace métrique.

Définition 1.2.2 (Convergence)**.** Nous disons qu'une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique (X, d) *converge* à un élément $x \in X$ si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Autrement dit, $\{x_n\}$ converge vers x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif N tel que

$$n > N \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Alors x est appelée la *limite* de la suite et nous écrivons $x_n \to x$, ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ou simplement $\lim x_n = x$.

Remarque 1.2.3. Notez que le point auquel une suite converge doit être un point de l'espace métrique. Par exemple, la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ne converge *pas* dans $(0,1]$ (avec la métrique usuelle) puisque $0 \notin (0,1]$. De même, considérez l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$ où d est la métrique usuelle. Puis, la suite $\{x_n\}$ où

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ne converge *pas* dans cet espace métrique (puisque $e \notin \mathbb{Q}$).

Remarque 1.2.4. Si d et d' sont deux métriques sur un ensemble X, il est possible qu'une suite d'éléments de X converge dans (X,d) mais pas dans (X,d'). Par exemple, supposons que $X = \mathbb{R}$, d est la métrique usuelle, d' est la métrique discrète, et $\{x_n\}$ est l'une des suites de la remarque 1.2.3. Alors $\{x_n\}$ converge (à e ou 0) dans (X,d), mais ne converge pas dans (X,d'), puisque $d'(x_n,e) = d'(x_n,0) = 1$ pour tout n.

Proposition 1.2.5. *Si une suite dans un espace métrique converge, alors la limite est unique.*

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans un espace métrique (X,d), que $x_n \to x$, et que $x_n \to y$, où $x, y \in X$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$,

$$0 \le d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) = d(x_n,x) + d(x_n,y).$$

Puisque $d(x_n,x) \to 0$ et $d(x_n,y) \to 0$, il faut que $d(x,y) = 0$ et donc $x = y$. $\square$

Jetons un coup d'oeil de plus près à la convergence dans $\mathbb{C}^m$ avec la métrique usuelle d. Soit $\{x_n\}$ une suite dans cet espace. Chaque x_n est un m-uplet ordonné. Nous écrivons

$$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m}), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Supposons que la suite converge à un élément $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^m$. Donc, par définition,

$$d(x_n, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_{n,k} - y_k|^2} \to 0.$$

Notons que, pour chaque $j = 1, 2, \dots, m$, nous avons

$$0 \le |x_{n,j} - y_j| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_{n,k} - y_k|^2}.$$

Ainsi, pour chaque j, nous avons $x_{n,j} \to y_j$ quand $n \to \infty$. En d'autres termes, chacune des suites $\{x_{n,j}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \dots, n$, est convergente (et converge vers y_j). Inversement, si $x_{n,j} \to y_j$ pour chaque j, alors $d(x_n, y) \to 0$. Par conséquent, la convergence d'une suite dans $\mathbb{C}^m$ est équivalente à la convergence des composantes. Nous voyons que la même chose est vraie pour $\mathbb{R}^m$, en utilsant exactement le même argument.

Maintenant considérons l'espace métrique ℓ^2. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans ℓ^2, avec limite $y = (y_1, y_2, \dots)$. Soit

$$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Puis, pour chaque $j \in \mathbb{N}_+$,

$$0 \leq |x_{n,j} - y_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - y_k|^2} = d(x_n, y) \to 0,$$

et donc $x_{n,j} \to y_j$ quand $n \to \infty$. Ainsi, convergence d'une suite dans ℓ^2 implique convergence des composantes.

Cependant, contrairement dans $\mathbb{C}^m$, l'inverse n'est pas vrai. Considérons la suite $\{e_n\}$, où

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

La suite de k-ième composantes converge vers 0 pour chaque k, puisque chaque composante est finalement zéro (plus précisément, la k-ième composante de e_j est nulle pour $j > k$). Cependant, $y = (0, 0, 0, \dots)$ n'égale pas $\lim e_n$ puisque $d(e_n, y) = 1$ pour tout n. En fait, il suivra de résultés que nous verrons plus tard que la suite $\{e_n\}$ ne converge pas du tout. Ceci est essentiellement parce que les termes de la suite ne se rapprochent pas ; mais plutôt ils restent à une distance 1 de l'un à l'autre.

Exercices.

1.2.1. Montrez que si nous remplaçons la métrique usuelle sur $\mathbb{C}^m$ (ou $\mathbb{R}^m$) par la métrique ℓ^p, il reste vrai que la convergence dans cet espace métrique est équivalente à la convergence des composantes.

1.2.2 ([Coh03, Ex. 2.9(14)]). Dans un espace semimétrique (voyez l'exercice 1.1.18), la convergence d'une suite est définie comme dans un espace métrique. Soit (X, d) l'espace semimétrique de l'exercice 1.1.18(b), avec $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. Montrez que la suite $\{x_n\}$, où $x_n(t) = t^n$ $(0 \leq t \leq \frac{1}{2})$ est convergente et que toute fonction constante sur $[0, \frac{1}{2}]$ est une limite. (Par conséquent, les suites convergentes dans des espaces semimétrique ne doivent pas avoir des limites uniques.)

1.3 Suites de fonctions

Dans cette section, nous discutons les suites de fonctions et les types différents de convergence pour telles suites.

Supposons que $\{f_n\}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles (ou à valeurs complexes), ayant tous le même domaine D.

Définition 1.3.1 (Convergence simple)**.** Nous disons que la suite $\{f_n\}$ *converge simplement* (ou *ponctuellement*) si, pour tout $x \in D$, la suite $\{f_n(x)\}$ de nombres réels (ou complexes) converge. Dans ce cas, la fonction f avec le domaine D définie par $f(x) = \lim f_n(x)$, $x \in D$, est appelé la *limite simple* (ou *limite ponctuelle*) de $\{f_n\}$. Nous écrivons $\lim f_n = f$ ou $f_n \to f$.

Remarque 1.3.2. Une autre façon d'écrire la définition de la convergence ponctuelle est que $\{f_n\}$ converge simplement vers f si pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in D$, il existe un entier positif $N(x)$ tel que

$$n > N(x) \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Il est important de noter que $N(x)$ dépend de x. Autrement dit, nous pouvons choisir une valeur différente de $N(x)$ pour chaque x (et ϵ). Il est pour cette raison que nous utilisons la notation $N(x)$, au lieu de simplement N.

Exemple 1.3.3. Pour $n \in \mathbb{N}_+$, soit $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$. Alors $\{f_n\}$ est une suite de fonctions avec domaine $\mathbb{R}$. Cette suite converge simplement ver $f(x) = 0$, la fonction zéro.

Définition 1.3.4 (Convergence uniforme)**.** Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions à valeurs réelles (ou à valeurs complexes) avec le domaine D et soit f une autre fonction avec le même domaine. Nous disons que la suite $\{f_n\}$ *converge uniformément* à f si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif N tel que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in D.$$

Nous écrivons $f_n \rightrightarrows f$ et appelons f la *limite uniforme* de la suite $\{f_n\}$.

Remarque 1.3.5. Notez que, pour chaque ϵ, nous devons trouver *un* N qui fonctionne pour *tout* x. Ceci est différent de la situation pour la convergence simple, où N peut dépendre de x.

Exemples 1.3.6. (a) Considérons la suite de l'exemple 1.3.3. Cette suite ne converge *pas* uniformément vers la fonction zéro. Nous pouvons voir cela comme suit. Pour tout choix de nombre entier positif n, nous avons

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{n} \geq 1 \text{ pour tout } x \geq n.$$

Ainsi, la condition dans la définition 1.3.4 ne peut pas être satisfaite pour tout $\epsilon \leq 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, définissons une fonction $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 + 1/n, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Puis $\{f_n\}$ converge uniformément vers la fonction constante 2.

Proposition 1.3.7. *Une suite de fonctions $\{f_n\}$ dans $C[a,b]$ (avec la métrique uniforme) converge dans cette métrique si et seulement si elle converge uniformément.*

Démonstration. Supposons que $\{f_n\}$ est convergente dans $C[a,b]$ (avec la métrique uniforme) avec la limite f. Puis

$$d(f_n, f) = \max_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| \to 0.$$

Par conséquent, d'après la définition d'une limite, pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver un entier positif N tel que

$$n > N \implies \max_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

Donc

$$n > N \implies |f_n(t) - f(t)| < \epsilon \; \forall \; t \in [a,b].$$

Ainsi $f_n \rightrightarrows f$. Nous laissons la réciproque comme exercice (facile). □

Remarque 1.3.8. Proposition 1.3.7 justifie le nom *métrique uniforme*.

Exercices.

1.3.1. Prouver la réciproque dont la preuve a été omis dans la preuve de la proposition 1.3.7.

1.4 Espaces complets

Nous aimerions être capable de déterminer qu'une suite converge sans falloir connaître la limite à l'avance. Cela devrait avoir quelque chose à voir avec les termes dans une suite se rapprochant.

Définition 1.4.1 (Suite de Cauchy)**.** Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique (X,d) est appelée une *suite de Cauchy* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif N tel que

$$m, n > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Définition 1.4.2 (Espace complet)**.** On dit qu'un espace métrique est *complet* si toute suite de Cauchy dans l'espace converge.

Théorème 1.4.3 (Complétude des nombres réels)**.** *L'espace métrique* $\mathbb{R}$ *(avec la métrique usuelle) est complet.*

Démonstration. Vous avez vu ce résultat dans des cours d'analyse précédents. Vous pouvez aussi le trouver, par exemple, dans [Coh03, Th. 1.7.12]. □

Exemple 1.4.4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas complet. Par exemple, considérez la suite $\{x_n\}$ où x_n est égal à l'expansion décimale de π tronqué après la n-ième décimale :

$$x_1 = 3.1$$
$$x_2 = 3.14$$

$$x_3 = 3.141$$
$$\vdots$$

Alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy puisque $|x_n - x_m| \leq 10^{-N}$ pour $n, m > N$. Cependant, cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque π n'est pas un nombre rationnel.

Théorème 1.4.5. *Chaque suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans un espace métrique (X, d), avec $\lim x_n = x$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N tel que

$$n > N \implies d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puis, pour tous $n, m > N$, nous avons

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) = d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ainsi $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. □

Par conséquent, dans un espace métrique, chaque suite convergente est une suite de Cauchy, mais les suites de Cauchy ne doivent pas converger (à moins que l'espace métrique est complet).

A la fin de la section 1.2, nous avons examiné la suite $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\dots$ dans ℓ^2, et nous avons montré que cette suite ne converge pas à $(0, 0, 0, \dots)$ dans ℓ^2, même si elle converge vers cet élément composante par composante. Nous pouvons maintenant prouver que la suite $\{e_n\}$, en fait, ne converge pas du tout. En effet, lorsque $n \neq m$, nous avons $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$. Ainsi $\{e_n\}$ n'est pas une suite de Cauchy et donc, d'après le théorème 1.4.5, il ne converge pas. Prouver qu'une suite ne converge pas est une utilisation importante du theorem 1.4.5.

Exemple 1.4.6 ($\mathbb{C}$ est complet). Nous allons montrer que l'espace métrique $\mathbb{C}$, avec la métrique usuelle, est complet. Soit $\{x_n = u_n + iv_n\}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, où $u_n, v_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_+$. Puisque $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un N tel que $m, n > N \implies |x_n - x_m| < \epsilon$. Puis,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(u_n + iv_n) - (u_m + iv_m)| = |(u_n - u_m) + i(v_n - v_m)| \\ &= \sqrt{(u_n - u_m)^2 + (v_n - v_m)^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$n, m > N \implies |u_n - u_m| \leq \sqrt{(u_n - u_m)^2 + (v_n - v_m)^2} = |x_n - x_m| < \epsilon.$$

De même,

$$n, m > N \implies |v_n - v_m| < \epsilon.$$

Ainsi $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, ces suites convergent vers certains nombres réels u et v (respectivement). Soit $x = u + iv \in \mathbb{C}$. Puis, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un N tel que $|u_n - u| < \epsilon/2$ et $|v_n - v| < \epsilon/2$ pour tous $n > N$. Alors

$$0 \leq d(x_n, x) = |x_n - x| = |(u_n + iv_n) - (u + iv)| = |(u_n - u) + i(v_n - v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \epsilon,$$

pour tout $n > N$. Donc, la suite $\{x_n\}$ converge. Ainsi, toute suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ converge et donc $\mathbb{C}$ est complet.

Exemple 1.4.7 (ℓ^2 est complet). Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2 où $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$. D'après la définition de l'espace ℓ^2, la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^2$ converge pour tout n. Puisque $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un N tel que

$$m, n > N \implies d(x_n, x_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2} < \epsilon.$$

Cela implique que

$$m, n > N \implies \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2 < \epsilon^2$$

et donc

$$m, n > N \implies |x_{n,k} - x_{m,k}| < \epsilon \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_+.$$

Ainsi, pour chaque $k \in \mathbb{N}_+$, $\{x_{n,k}\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, cette suite converge. Soit $y_k = \lim_{n\to\infty} x_{n,k}$ et soit $y = (y_1, y_2, \dots)$. Nous allons prouver que $x_n \to y$ quand $n \to \infty$.

Pour $r = 1, 2, \dots$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2 < \epsilon^2 \text{ pour tous } m, n > N.$$

Ainsi, puisque $x_{m,k} \to y_k$ quand $m \to \infty$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{n,k} - y_k|^2 \leq \epsilon^2 \text{ pour tout } n > N. \tag{1.5}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}^r$, nous avons

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} |y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |y_k - x_{n,k}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{n,k}|^2} \leq \epsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{n,k}|^2} \leq \epsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^2},$$

pour tout $n > N$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^2$ converge puisque $x_n \in \ell^2$. Par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$ converge et donc $y \in \ell^2$. Alors, en utilisant (1.5), nous avons

$$d(x_n, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - y_k|^2} \leq \epsilon \text{ pour tout } n > N.$$

Donc $\{x_n\}$ converge à y dans ℓ^2.

Remarque 1.4.8 (ℓ^p est complet). Un argument similaire à celui ci-dessus montre que, en fait, ℓ^p est complet pour $p \geq 1$. Voyez l'exercice 1.4.3.

Exemple 1.4.9 ($\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets). Nous pouvons adapter facilement l'argument pour ℓ^2 pour montrer que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Ou, nous pouvons utiliser le fait que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ peut être considérée comme sous-espaces de ℓ^2. Ensuite, considèrez une suite de Cauchy $\{x_i\}$ dans $\mathbb{C}^n$. Comme cela est également une suite dans ℓ^2 , qui est complet, cette suite converge vers un point x dans ℓ^2. Nous avons vu que la convergence dans ℓ^2 implique la convergence des composantes. Mais puisque le k-ième composante de chaque x_i est nulle pour $k > n$, le même doit être vrai du point limite x. Ainsi $x \in \mathbb{C}^n$. Puisque la métrique usuelle sur $\mathbb{C}^n$ est simplement la restriction de la métrique de ℓ^2, nous voyons que $\{x_i\}$ converge vers x dans $\mathbb{C}^n$. Un argument similaire fonctionne pour $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.4.10. L'argument de l'exemple 1.4.9 aussi montre que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets dans les métriques ℓ^p et ℓ^∞. (Voyez l'exemple 1.4.4.)

Exemple 1.4.11 ($C[a,b]$ est complet). Supposons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C[a,b]$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver un $N > 0$ tel que

$$m,n > N \implies \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon.$$

Ainsi, pour chaque $t \in [a,b]$, nous avons

$$m,n > N \implies |x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon, \tag{1.6}$$

et donc $\{x_n(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, nous savons que la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers un nombre réel, que nous noterons $x(t)$. Ceci définit une fonction x sur $[a,b]$. Si nous prenons la limite $m \to \infty$ dans (1.6), nous voyons que pour tout $t \in [a,b]$,

$$n > N \implies |x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon.$$

Cela implique que la suite $\{x_n\}$ converge uniformément à x.

Il reste à montrer que x est continue. Fixons $s \in [a,b]$. Nous allons montrer que x est continue au point s. Choisissons $\epsilon > 0$. Puisque $\{x_n\}$ converge uniformément vers x et $\{x_n(s)\}$ converge vers $x(s)$, nous pouvons trouver $N > 0$ tel que

$$n > N,\ t \in [a,b] \implies |x(t) - x_n(t)| < \epsilon/3,$$

et

$$n > N \implies |x_n(s) - x(s)| < \epsilon/3.$$

Maintenant fixe un $n > N$. Puisque x_n est continue, nous pouvons choisir un $\delta > 0$ tel que

$$|t - s| < \delta,\ t \in [a,b] \implies |x_n(t) - x_n(s)| < \epsilon/3.$$

Alors, quand $|t - s| < \delta$, nous avons

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &= |(x(t) - x_n(t)) + (x_n(t) - x_n(s)) + (x_n(s) - x(s))| \\ &\leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(s)| + |x_n(s) - x(s)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, x est continue au point s. Puisque s était arbitraire, x est continue.

Exemple 1.4.12 ($C_1[a,b]$ n'est pas complet ([Coh03, 2.6(6)])). Afin de montrer que $C_1[a,b]$ n'est pas complet, il suffit de trouver un exemple d'une suite de Cauchy dans cet espace qui ne converge pas. Nous allons examiner le cas où $a < 0$ et $b > 1$, mais notre exemple peut facilement être modifié pour d'autres valeurs de a et b. Définissons la suite de fonctions $\{x_n\}$ en $C_1[a,b]$ par

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le 0, \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le t \le b. \end{cases}$$

Alors

$$d(x_n, x_m) = \int_a^b |x_n(t) - x_m(t)| dt \le \frac{1}{\min\{m, n\}}.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$,

$$n, m > \frac{1}{\epsilon} \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Nous allons montrer que cette suite ne converge pas. Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$g(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le 0, \\ 1, & 0 < t \le b, \end{cases}$$

et soit f une fonction continue quelconque sur $[a,b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, nous avons

$$|g(t) - f(t)| = |(g(t) - x_n(t)) - (x_n(t) - f(t))| \le |g(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - f(t)|.$$

Ainsi

$$\int_a^b |g(t) - f(t)| dt \le \int_a^b |g(t) - x_n(t)| dt + \int_a^b |x_n(t) - f(t)| dt.$$

L'intégrale sur la gauche est $\int_a^0 |f(t)| dt + \int_0^b |1 - f(t)| dt$. Puisque f est continue, au moins un de ces termes doit être positif (puisque nous ne pouvons pas avoir $f(0) = 0$ et $f(0) = 1$ au même temps). La première intégrale sur la droite tend vers zéro quand $n \to \infty$ (par une inégalité semblable à celui que nous avons utilisé pour montrer que la suite $\{x_n\}$ est Cauchy). Ainsi, nous ne pouvons pas avoir

$$d(x_n, f) = \int_a^b |x_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

pour aucune fonction continue f. Ainsi $\{x_n\}$ ne converge pas dans $C_1[a,b]$.

Remarque 1.4.13. L'exemple précédent montre qu'un ensemble peut être complet lorsqu'il est muni d'une métrique et pas complet avec une autre.

Remarque 1.4.14. En fait, l'exemple 1.4.12 peut être généralisée, pour montrer que $C_p[a,b]$, $p > 0$, n'est pas complet. La preuve utilise l'inégalité de Hölder.

Rappelez-vous (des cours d'analyse précédents) que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente elle-même. Cependant, une suite qui ne converge *pas* peut avoir des sous-suites convergentes. Par exemple,

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots$$

ne converge pas, mais elle a la sous-suite convergente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Le résultat suivant nous montre que cela ne peut pas se produire pour les suites de Cauchy.

Proposition 1.4.15. *Dans un espace métrique, toute suite de Cauchy qui a une sous-suite convergente est convergente elle-même, avec la même limite.*

Remarque 1.4.16. Bien sûr, le théorème est trivial si l'espace métrique est complet, mais il reste vrai dans *tout* espace métrique.

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans un espace métrique (X, d). Soit $\{x_{n_k}\}$ une sous-suite convergente de $\{x_n\}$ avec limite x. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1 > 0$ tel que

$$k > N_1 \implies d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, il existe aussi $N_2 > 0$ tel que

$$m, n > N_2 \implies d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et choisissons $k > N$. Alors $n_k \geq k > N$ et donc

$$n > N \implies d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ainsi $\{x_n\}$ converge à x. □

Exercices.

1.4.1 ([Coh03, Ex. 2.9(1)]). Utilisez l'inégalité de l'exercice 1.1.4 pour démontrer que si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des suites convergentes dans un espace métrique et $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, alors $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$, où d est la métrique pour l'espace.

1.4.2 ([Coh03, Ex. 2.9(2)]). Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites de Cauchy dans un espace complet, avec métrique d. Montrez qu'elles ont la même limite si et seulement si $d(x_n, y_n) \to 0$.

1.4.3. Montrez que ℓ^1 est complet (voir l'exemple 1.1.22).

1.4.4. Montrez que l'espace métrique ℓ^∞ est complet (voir l'exemple 1.1.23).

1.4.5. Un ensemble avec la métrique discrète est-il complet ?

1.4.6 ([Coh03, Ex. 2.9(3)]). Montrez que la suite $\{x_n\}$ définie dans l'exemple 1.4.12 n'est pas une suite de Cauchy dans $C[a, b]$, où $a < 0$ et $1 < b$.

1.4.7 ([Coh03, Ex. 2.9(12)]). Pourquoi le contre-exemple de l'exemple 1.4.12 ne fonctionne pas quand $a = 0$?

1.5 Sous-espaces métriques

Rappelons-nous la définition d'un sous-espace métrique et la métrique induite de la définition 1.1.6. Notez que si Y est un sous-espace métrique de X, alors il est possible d'avoir une suite dans (Y, d) qui converge vers un point de X qui n'est pas dans Y. Par exemple, voyez l'exemple 1.4.4 (dans cet exmple, $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{Q}$).

Définition 1.5.1 (Sous-espace fermé)**.** Nous disons qu'un sous-espace S d'un espace métrique X est *(séquentiellement) fermé* s'il contient les limites de toutes les suites dans S qui convergent dans X.

Remarque 1.5.2. Plus tard, nous allons parfois utiliser le terme plus précis 'séquentiellement fermé', au lieu de 'fermé', lorsque nous discutons de la topologie et considérer des ensembles fermés, où 'fermé' a un sens différent.

Exemples 1.5.3. (a) Un intervalle fermé $[a, b]$, $a < b$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}$ (avec la métrique usuelle).

(b) $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^2$ (avec la métrique usuelle).

(c) Pour un entier positif c, $\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \leq c\}$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{C}$.

(d) Pour un entier positif c, $\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| < c\}$ n'est pas un sous-espace fermé de $\mathbb{C}$.

(e) Dans un espace métrique avec la métrique discrète, tout sous-espace métrique est fermé.

(f) L'argument dans l'exemple 1.4.9 montre que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces fermés de ℓ^2 (en fait, de ℓ^p pour $1 \leq p \leq \infty$).

(g) Chaque espace métrique est un sous-espace fermé de lui-même. Notez que ce n'est pas nécessaire que l'espace soit complet. Dans la définition de sous-espace fermé, nous demandons seulement que la limite de toute suite *qui converge* dans l'espace métrique plus grande soit dans le sous-espace. Par exemple, pour $a < b$, (a, b) est un sous-espace fermé d'elle-même, mais pas un sous-espace fermé de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5.4. *Un sous-espace d'un espace métrique complet est complet si et seulement s'il est fermé.*

Démonstration. Supposons que S est un sous-espace fermé d'un espace métrique complet X. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans S. Donc, elle est aussi une suite de Cauchy dans

X. Puisque X est complet, $\{x_n\}$ converge vers un point $x \in X$. Alors, puisque S est fermé, $x \in S$. Ainsi, chaque suite de Cauchy dans S converge dans S, et donc S est complet.

Supposons maintenant que S est un sous-espace complet d'un espace métrique complet X. Soit $\{x_n\}$ une suite dans S qui, comme une suite dans X, converge vers un point $x \in X$. Alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X (d'après le théorème 1.4.5) et donc aussi dans S. Puisque S est complet, nous avons que $x \in S$. Ainsi S est fermé. $\square$

Définition 1.5.5 (Diamètre)**.** Soit (X, d) un espace métrique et soit S un sous-ensemble non-vide de X. Le nombre

$$\delta(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

est appelé le *diamètre* de l'ensemble S.

Définition 1.5.6 (Ensemble borné d'un espace métrique)**.** Nous disons qu'un sous-ensemble d'un espace métrique est *borné* s'il est vide ou si son diamètre est fini.

Exemple 1.5.7. Toute suite de Cauchy dans un espace métrique est bornée.

Démonstration. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (X, d). Fixons $\epsilon > 0$. Alors nous pouvons trouver $N > 0$ tel que

$$n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

En particulier,

$$n > N \implies d(x_n, x_{N+1}) < \epsilon.$$

Soit

$$K = \max\{d(x_n, x_{N+1}) \mid n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Donc

$$d(x_n, x_{N+1}) < K + \epsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_+.$$

Alors, pour tous $n, m \in \mathbb{N}_+$, nous avons, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{N+1}) + d(x_m, x_{N+1}) < 2(K + \epsilon).$$

Ainsi il existe un majorant de l'ensemble $\{d(x_n, x_m) \mid n, m \in \mathbb{N}_+\}$. Par conséquent, le supremum de cet ensemble est fini et donc $\{x_n\}$ est borné. $\square$

Exercices.

1.5.1. Supposons que S est un sous-ensemble non-vide d'un espace métrique (X, d). Montrez que S est borné si et seulement s'il existe un point $x \in X$ et un nombre $K > 0$ tel que $d(x, y) < K$ pour tout $y \in S$. Dans les grande lignes, cela dit qu'un sous-ensemble est borné si et seulement si elle est contenue dans une boule dans X de rayon fini.

1.5.2. Montrez que toute suite convergente dans un espace métrique est bornée.

1.5.3 ([Coh03, Ex. 2.9(10)]). Si $\{z_n\}$ est une suite de nombres complexes, et $z_n \to z$, montrez que $|z_n| \to |z|$. Puis, montrez que l'ensemble $\{w \mid w \in \mathbb{C},\ |w| \leq c\}$ de $\mathbb{C}$ est fermé pour tout nombre réel c.

1.5.4 ([Coh03, Ex. 2.9(11)]). Soit Y l'ensemble de toutes les suites à valeurs complexes $(y_1, y_2, \dots)$ pour lesquelles $|y_k| \leq 1/k$, $k \in \mathbb{N}_+$. Définissez d par

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}, \quad x, y \in Y.$$

Montrez que (Y, d) est un sous-espace de ℓ^2, et qu'il est fermé.

1.6 Fonctions entre les espaces métriques

Dans cette section, nous discutons les fonctions entre les espace métriques.

Définition 1.6.1. Une *fonction* de l'espace métrique (X, d) dans l'espace métrique (Y, d') est simplement une fonction d'ensembles $A \colon X \to Y$.

Nous allons souvent omettre les parenthèses lorsque nous parlons des fonctions entre des espaces métriques. Donc, nous écrivons Ax au lieu de $A(x)$. Si $A \colon X \to Y$ et $B \colon Y \to Z$, on note leur composition par BA, qui est une fonction de X dans Z. Rappelons-nous que la composition des fonctions est associative. Donc, si $A \colon W \to X$, $B \colon X \to Y$, et $C \colon Y \to Z$, alors $(CB)A = C(BA)$. Ainsi, nous pouvons écrire CBA sans risque d'ambiguïté.

Si $A \colon X \to X$, alors nous pouvons composer A avec elle-même et, pour n un entier positif, nous définissons

$$A^n = AA \cdots A \qquad (n \text{ facteurs}).$$

Par convention, A^0 est la fonction identité $I \colon X \to X$ définie par $Ix = x$ pour tout $x \in X$.

Exemple 1.6.2. Définissons une fonction $A \colon C[a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$Ax = \int_a^b x(t)\, dt.$$

Notez que la fonction A est bien définie parce que toute fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable sur cet intervalle.

Exemple 1.6.3. Supposons que nous considérons les éléments de $\mathbb{C}^n$ comme des vecteurs colonnes (par exemple, matrices de type $n \times 1$ avec des composantes complexes). Si B est une matrice de type $m \times n$ avec des composantes complexes, alors B définit une application $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ en envoyant $x \in \mathbb{C}^n$ à $Bx \in \mathbb{C}^m$. Dans ces exemples, nous dénotons souvent la matrice et la fonction correspondante avec la même lettre.

Puisque dans un espace métrique, nous avons une notion de distance, nous pouvons parler de la continuité (ou manque de continuité) d'une fonction entre les espaces métriques.

Définition 1.6.4 (Fonction séquentiellement continue)**.** Supposons que X et Y sont des espaces métriques. Nous disons qu'une application $A\colon X \to Y$ est *(séquentiellement) continue au point* $x \in X$ si pour chaque suite convergente $\{x_n\}$ dans X avec limite x, $\{Ax_n\}$ est une suite convergente en Y avec limite Ax. La fonction A est appelée *(séquentiellement) continue sur* X, ou simplement *(séquentiellement) continue*, si elle est (séquentiellement) continue à tous les points de X

Remarque 1.6.5. Plus tard, dans la section 4.6, nous allons voir une autre définition de la continuité, ce qui est la raison pour laquelle nous insérons parfois le mot 'séquentiellement' ci-dessus. Cependant, nous verrons que pour les espaces métriques, les deux définitions sont pareilles et donc il n'y a aucun risque de confusion.

Exemple 1.6.6. Considérons la fonction A de l'exemple 1.6.2. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans $C[a,b]$ avec limite x. Choisissons $\epsilon > 0$. Puis, d'après la définition de la métrique uniforme sur $C[a,b]$, il existe un $n > 0$ tel que

$$n > N \implies \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Donc

$$n > N \implies |x_n(t) - x(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}\ \forall\ t \in [a,b].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d(Ax_n, Ax) &= |Ax_n - Ax| \\ &= \left| \int_a^b x_n(t)\,dt - \int_a^b x(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (x_n(t) - x(t))\ dt \right| \\ &\le \int_a^b |x_n(t) - x(t)|\ dt \\ &\le \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dt \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $Ax_n \to Ax$. Ainsi, A est continue.

Exercices.

1.6.1. Montrez que les fonctions décrites dans l'exemple 1.6.3 sont continues.

Chapitre 2

Théorème du point fixe

Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème du point fixe pour les espaces métriques et discuter quelques applications de ce résultat important.

2.1 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous ne considérons que les fonctions d'un espace métrique dans lui-même.

Définition 2.1.1 (Points fixes et fonctions contractantes)**.** Supposez que A est une fonction d'un espace métrique (X, d) dans lui-même.

(a) Un point $x \in X$ tel que $Ax = x$ est appelé un *point fixe* de la fonction A.

(b) La fonction A est appelée une *fonction contractante* (ou *contraction*) s'il existe un nombre réel α, avec $0 < \alpha < 1$, tel que

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

Un tel nombre α est appelé une *constante de contraction* pour A.

Proposition 2.1.2. *Les fonctions contractantes sont continues.*

Démonstration. Supposons que A est une fonction contractante sur un espace métrique (X, d) et que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans X avec limite x. Soit α une constante de contraction pour A. Alors

$$0 \leq d(Ax_n, Ax) \leq \alpha d(x_n, x) < d(x_n, x) \to 0,$$

et donc $d(Ax_n, Ax) \to 0$ (autrement dit, $Ax_n \to Ax$). □

Remarque 2.1.3. Notez que l'implication réciproque de la proposition 2.1.2 n'est pas vraie. Par exemple, la fonction identité n'est pas une contraction mais elle est certainement continue. Notez aussi que la preuve n'a pas utilisé le fait que $0 < \alpha < 1$, et ainsi pourrait être généralisée un peu.

Théorème 2.1.4 (Théorème du point fixe)**.** *Toute fonction contractante sur un espace métrique complet possède un est un seul point fixe.*

Démonstration. Supposons que (X, d) est un espace métrique complet et que A est une fonction contractante sur X avec constante de contraction α. Soit $x_0 \in X$ et définissons une suite $\{x_n\}$ dans X par

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Nous montrons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Pour $k > 1$, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k-1}) &= d(A^k x_0, A^{k-1} x_0) \\ &= d(A(A^{k-1}x_0), A(A^{k-2}x_0)) \\ &\leq \alpha d(A^{k-1}x_0, A^{k-2}x_0) \\ &\leq \alpha^2 d(A^{k-2}x_0, A^{k-3}x_0) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^{k-1} d(Ax_0, x_0). \end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, nous devons considérer $d(x_n, x_m)$ pour les valeurs grandes de m et n. Puisque $d(x_n, x_m) = d(x_m, x_n)$, nous pouvons supposer que $1 \leq m < n$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(A^n x_0, A^m x_0) \\ &\leq d(A^n x_0, A^{n-1}x_0) + d(A^{n-1}x_0, A^{n-2}x_0) + \cdots + d(A^{m+1}x_0, A^m x_0) \quad (\text{inégalité } \Delta) \\ &\leq \alpha^{n-1} d(Ax_0, x_0)) + \alpha^{n-2} d(Ax_0, x_0) + \cdots + \alpha^m d(Ax_0, x_0) \\ &= \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-m-1}) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (\text{somme d'une série géométrique}) \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (\text{puisque } 0 < \alpha < 1). \end{aligned}$$

Puisque $0 < \alpha < 1$, nous avons $\alpha^m \to 0$ quand $m \to \infty$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons $d(x_n, x_m) < \epsilon$ pour m et n suffisamment grands. Ainsi $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Puisque X est complet, cette suite converge à un point $x \in X$.

Nous montrons que x est un point fixe de A. Pour tout entier positif n, nous avons

$$0 \leq d(Ax, x) \leq d(Ax, x_n) + d(x_n, x) = d(Ax, Ax_{n-1}) + d(x_n, x) \leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x).$$

Puisque $d(x_n, x) \to 0$ et $d(x, x_{n-1}) \to 0$, nous avons $d(Ax, x) = 0$ et donc $Ax = x$. Ainsi x est un point fixe de A. Maintenant supposons que y est un autre point fixe de A. Alors

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y).$$

Puisque $\alpha < 1$, cela peut être vraie seulement si $d(x, y) = 0$. Donc $x = y$. Par conséquent, x est le seul point fixe de A. □

En effet, nous pouvons démontrer une généralisation du théorème de point fixe qui est utile dans certaines applications.

Théorème 2.1.5. *Supposons que A est une fonction sur un espace métrique complet telle que A^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}_+$. Alors A possède un est un seul point fixe.*

Démonstration. D'après le théorème du point fixe, A^n possède un est un seul point fixe x. Donc $A^n x = x$. Puisque

$$A^n(Ax) = A^{n+1}x = A(A^n x) = Ax,$$

nous voyons que Ax est aussi un point fixe de A^n. Mais selon le théorème du point fixe, A^n possède un *seul* point fixe. Ainsi $Ax = x$. Autrement dit, x est aussi un point fixe de A. Maintenant supposons que y est un autre point fixe de A. Alors

$$A^n y = A^{n-1}(Ay) = A^{n-1}y = \cdots = Ay = y,$$

et donc y est aussi un point fixe de A^n. Ainsi $x = y$ par l'unicité dans le théorème du point fixe. □

Exercices.

2.1.1 ([Coh03, Ex. 3.5(3)]). Considérez $\mathbb{R}^n$ avec la métrique

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Voir l'exercice 1.1.7.) Montrez que cette métrique est complète. (*Indice* : Une possibilité est d'utiliser l'exercice 1.4.3.) Appelez cet espace métrique X. Définissez une fonction $M\colon X \to X$ par $y = Mx$, où $x \in X$, et

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k} x_k + b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

avec $c_{j,k}, b_j \in \mathbb{R}$. Démontrez que M est une contraction sur X si

$$0 < \max_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{j,k}| < 1.$$

2.1.2 ([Coh03, Ex. 3.5(8)]). Soit A une fonction d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même. Démontrez que si nous affaiblissons la condition dans la définition d'une contraction d'être

$$d(Ax, Ay) < d(x, y) \ \forall\, x, y \in X, \ x \neq y,$$

alors l'existence d'un point fixe n'est pas garantie. Autrement dit, trouvez une fonction d'un espace métrique complet dans lui-même qui satisfait la condition ci-dessus mais qui ne possède aucun point fixe.

2.1.3 ([Coh03, Ex. 3.5(10)]). Soit c l'ensemble de toutes les suites convergentes à valeurs complexes. Définissons une fonction $d\colon c \times c \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par

$$d(x,y) = \sup_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|, \quad x = (x_1, x_2, \dots),\ y = (y_1, y_2, \dots) \in c.$$

(a) Démontrez que (c, d) est un espace métrique et qu'il est complet.

(b) Définissons une fonction A sur c par

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots,) = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots, \right).$$

Démontrez que A est une contraction, d'où A a un et un seul point fixe (que nous pouvons obtenir par l'inspection). Supposons que nous allons obtenir ce point par itération et soient $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ les itération successives. En prenant $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, montrez que $x^{(n)}$ à k-ième composante

$$\frac{k!}{(n+k-1)!(n+k)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\ k = 1, 2, \dots.$$

(c) Définissons une fonction B sur c par

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3, 1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{3}x_4, 1 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{3}x_5, \dots \right).$$

Démontrez que B est une contraction. Trouver le point fixe de B (en utilisant n'importe quelle méthode).

2.2 Applications

Nous passons maintenant à certaines applications du théorème du point fixe. Supposons que $f\colon [a,b] \to [a,b]$ est une fonction pour laquelle il existe une constante $0 < K < 1$ tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad \forall\ x_1, x_2 \in [a,b].$$

Nous disons que f satisfait la *condition de Lipschitz* avec *constante de Lipschitz* K (voyez la définition 4.6.9). Notez que l'intervalle $[a,b]$ avec la métrique usuelle est complet (il est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, qui est complet), et que f est une contraction. Ainsi, le théorème du point fixe nous dit que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique.

En particulier, si $f\colon [a,b] \to [a,b]$ est dérivable et il existe un $0 < K < 1$ tel que

$$|f'(x)| \leq K \quad \forall\ x \in [a,b],$$

alors $f(x) = x$ a une solution unique. En effet, le théorème des accroissements finis (anglais : Mean Value Theorem) du calcul différentiel nous dit que, pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, il existe un point c, $x_1 < c < x_2$, tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| \leq K|x_1 - x_2|,$$

et donc f satisfait la condition de Lipschitz avec constante $K < 1$.

Exemple 2.2.1. Montrons que l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 12x + 1 = 0$$

a une solution unique dans l'intervalle $[0, 1]$. Notez que l'équation est équivalente à

$$x^4 - 2x^3 + 1 = 12x \iff \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12} = x.$$

Définissons une fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}.$$

Puis, la résolution de l'équation d'origine équivaut à résoudre l'équation $f(x) = x$. Nous vérifions d'abord que l'image de f est contenu dans $[0, 1]$. Pour voir cela, notez que

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \implies x^3(2x - 3) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } \frac{3}{2}.$$

Donc f n'a aucun point critique dans l'intervalle $(0, 1)$. Puisque $f(0) = \frac{1}{12}$ et $f(1) = 0$, nous avons $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$.

Puis, pour $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1.$$

Par conséquent, nos conditions sont remplies et donc f a un point fixe unique. Pour le trouver, nous pouvons prendre $x_0 = 0$ et commencer à appliquer f. Nous obtenons

$$x_1 = f(0) \approx 0.0833, \quad x_2 = f(x_1) \approx 0.0832, \quad x_3 = f(x_2) \approx 0.08324, \dots.$$

Donc la racine est d'environ 0.08324.

Comme autre exemple, considérons les systèmes d'équations linéaires. Supposons que nous voulons résoudre le système linéaire

$$Ax = b$$

pour une matrice A de type $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$ (considéré comme un vecteur colonne). Pour appliquer le théorème du point fixe, nous avons besoin de l'équation sous la forme $f(x) = x$. Donc nous écrivons

$$Ax = b \iff x - Ax + b = x \iff (I - A)x + b = x \iff Cx + b = x, \quad \text{où } C = I - A.$$

Donc, nous définissons une fonction $M \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $Mx = Cx + b$ et nous voulons résoudre l'équation $Mx = x$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est un espace métrique complet, il y aura une solution unique si M est une contraction. Trouvons quelques conditions qui impliquent que M est une contraction. Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$d(My, Mz) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk} y_k + b_j \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + b_j \right) \right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(y_k - z_k) \right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (y_k - z_k)^2 \right) \right)} \; ,
\end{aligned}
$$

d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Ici $C = (c_{jk})$. Par conséquent,

$$
d(My, Mz) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^2} \cdot d(y, z),
$$

et donc M est une contraction si

$$
0 < \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^2 < 1.
$$

(Notez que ceci est une condition suffisante mais pas nécessaire). Si cette condition est satisfaite, alors nous pouvons résoudre l'équation en question par itération.

Notez que nous avons utilisé ici la métrique standard sur $\mathbb{R}^n$. Cependant, nous sommes libres d'utiliser toute métrique que nous voulons tant que $\mathbb{R}^n$ est un espace métrique complet avec cette métrique. Par exemple, nous pourrions utiliser la métrique d_∞ (voyez l'exemple 1.1.14). Rappelons que nous savons que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ est complet. Nous avons

$$
\begin{aligned}
d_\infty(My, Mz) &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk} y_k + b_j \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + b_j \right) \right| \\
&= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(y_k - z_k) \right| \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}||y_k - z_k| \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - z_k| \\
&= \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \right) \cdot d_\infty(y, z).
\end{aligned}
$$

Ainsi M est une contraction dans cette métrique si

$$
0 < \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1.
$$

Nous voyons donc que nous pourrions choisir de travailler avec des métriques différents dépendant de notre application particulière. Par exemple, il est possible qu'une matrice satisfait une des conditions ci-dessus, et pas l'autre.

Remarque 2.2.2. Pour d'autres applications du théorème du point fixe aux équations différentielles et intégrales, voyez [Coh03, §3.3].

Exercices.

2.2.1 ([Coh03, Ex. 3.5(2a)]). Montrez que

$$x^4 + 8x^3 + 32x - 32 = 0$$

a une solution unique dans l'intervalle [0,1].

2.2.2 ([Coh03, Ex. 3.5(4)]). Utilisez le théorème du point fixe pour montrer que les systèmes d'équations suivants ont des solutions uniques. (Aucun réglage des coefficients, en divisant une équation par un certain nombre, par exemple, devrait être nécessaire).

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{3}{4}x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{8}z & = & 2 \\ \frac{1}{6}x & + & \frac{1}{3}y & & & = & -1 \\ -\frac{2}{5}x & + & \frac{1}{4}y & + & \frac{5}{4}z & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{4}x & + & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{8}z & = & x-3 \\ -\frac{1}{6}x & + & \frac{2}{3}y & & & = & y+1 \\ \frac{2}{5}x & - & \frac{1}{4}y & - & \frac{1}{4}z & = & z+5 \end{array}$$

Chapitre 3

Compacité

Dans les cours précédents, vous avez rencontré la notion d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Nous discutons maintenant la compacité dans le cadre plus général des espaces métriques.

3.1 Espaces séquentiellement compacts

Rappelons, d'après la proposition 1.4.15 que, dans un espace métrique, toute suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente est elle-même convergente, avec la même limite. Nous allons utiliser ce fait plusieurs fois dans cette section.

Définition 3.1.1 (Séquentiellement compact)**.** Un sous-ensemble d'un espace métrique est appelé *(séquentiellement) compact* si chaque suite dans le sous-ensemble possède une sous-suite qui converge à un point du sous-ensemble.

Remarques 3.1.2.
(a) Nous utilisons le mot 'séquentiellement' pour distinguer cette notion de compacité d'une autre (impliquant les recouvrements ouverts). Nous allons examiner la relation entre les deux propriétés un peu plus tard dans le cours (voyez le théorème 4.5.9).

(b) Nous pouvons appliquer la définition 3.1.1 à l'espace métrique entier. Ainsi, un espace métrique est compact si chaque suite dans l'espace possède une sous-suite convergente.

(c) Nous considérons l'ensemble vide d'être un sous-ensemble compact de tout espace métrique.

Proposition 3.1.3. *Un espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique compact. D'après la définition de la compacité, $\{x_n\}$ a une sous-suite convergente. Puis, d'après la proposition 1.4.15, $\{x_n\}$ est elle-même convergente. □

Remarques 3.1.4.
(a) Nous utiliserons souvent la forme contraposée de ce théorème : Si un espace métrique n'est pas complet, alors il n'est pas compact.

(b) Il est possible qu'un espace métrique soit complet, mais pas compact. Par exemple, nous savons que $\mathbb{R}$ est complet mais $1, 2, 3, \ldots$ est une suite sans sous-suite convergente. Par conséquent $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Théorème 3.1.5. *Tout sous-ensemble compact d'un espace métrique est fermé.*

Démonstration. Supposons que S est un sous-ensemble compact d'un espace métrique X. Soit $\{x_n\}$ une suite dans S qui converge vers un point $x \in X$. Cela implique, en particulier, que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Puisque S est compact, $\{x_n\}$ a une sous-suite qui converge vers un point $y \in S$. Puis d'après la proposition 1.4.15, nous savons que $\{x_n\}$ est convergente dans S et donc $x = y \in S$, par l'unicité des limites. Ainsi S est fermé. □

Remarque 3.1.6. Notez que l'implication réciproque du théorème ci-dessus n'est pas vrai. Par exemple, $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble fermé de lui-même, mais il n'est pas compact.

Théorème 3.1.7. *Tout sous-ensemble compact d'un espace métrique est borné.*

Démonstration. Nous allons prouver le résultat par contradiction. Puisque le théorème est clair pour l'ensemble vide, nous supposons que S est un sous-ensemble compact et non vide d'un espace métrique (X, d), et que S n'est pas borné. Nous allons construire une suite dans S sans sous-suite convergente.

Choisissons un élément quelconque $x_1 \in S$. Il est impossible que $d(x, x_1) < 1$ pour tout $x \in S$ car cela impliquerait (d'après l'inégalité triangulaire) que $\delta(S) \leq 2$ (rappelons que $\delta(S)$ est le diamètre du sous-ensemble S). Par conséquent, nous pouvons trouver un point $x_2 \in S$ avec $d(x_2, x_1) \geq 1$. Soit

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + d(x_2, x_1) = 1 + d(x_2, x_1).$$

Il est impossible que $d(x, x_1) < \lambda_2$ pour tout $x \in S$ car cela impliquerait que $\delta(S) \leq 2\lambda_2$. Par conséquent, nous pouvons trouver un point $x_3 \in S$ avec $d(x_3, x_1) \geq \lambda_2$. Soit

$$\lambda_3 = \lambda_1 + d(x_3, x_1) = 1 + d(x_3, x_1).$$

En continuant de cette manière, nous construisons une suite $\{x_n\}$ dans S et une suite croissante de nombres $\{\lambda_n\}$ tels que

$$d(x_n, x_1) = \lambda_n - 1 \geq \lambda_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Puis, pour tout $n > m \geq 2$, nous avons

$$\lambda_m \leq \lambda_{n-1} \leq d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_1) = d(x_n, x_m) + \lambda_m - 1,$$

et donc $d(x_n, x_m) \geq 1$. Par conséquent, la suite $\{x_n\}$ n'a aucune sous-suite convergente (car aucune sous-suite peut être une suite de Cauchy). Cela contredit l'hypothèse que S est un sous-ensemble compact de X. Par conséquent, S est borné. □

Remarque 3.1.8. L'implication réciproque du théorème ci-dessus est fausse. Par exemple, $(0, 1)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ mais il n'est pas compact d'après le théorème 3.1.5, puisque il n'est pas fermé.

Théorème 3.1.9. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si est seulement s'il est fermé est borné.*

Démonstration. Nous savons déjà des théorèmes 3.1.5 et 3.1.7 que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact, alors il est fermé et borné. L'implication réciproque (en fait, les deux implications) a été fait dans les cours précédents. La preuve peut également être trouvée, par exemple, dans [Coh03, Th. 4.1.6]. Pour le cas $n = 1$ (et, dans certaines références, dans le cas général), ce résultat s'appelle le théorème de Bolzano–Weierstrass. □

Exemple 3.1.10. Le théorème 3.1.9 est faux pour les espaces métriques arbitraires. Un exemple utile est le sous-ensemble

$$S = \{e_i \mid i = 1, 2, \dots\}$$

de l'espace métrique ℓ^2. Ici e_i est la suite avec 1 dans la i-ième position et 0 dans toutes les autres positions. Puisque

$$d(e_m, e_n) = \sqrt{2} \quad \text{pour } m \neq n,$$

nous voyons que $\delta(S) = \sqrt{2}$ et donc S est borné. Puisque la suite $e_1, e_2, e_3, \dots$ n'a aucune sous-suite convergente, l'ensemble S n'est pas compact. Notez que S est fermé puisque toute suite dans S qui converge dans ℓ^2 doit être éventuellement constant (c.-à-d. l'image de la suite est finie) et donc convergente dans S. Donc, S est un exemple d'un sous-ensemble qui est fermé et borné, mais pas compacte. Alors

$$\text{compact} \implies \text{(fermé et borné)}$$

mais l'implication réciproque est fausse pour un espace métrique arbitraire. Cependent, dans *certains* espaces métriques, comme $\mathbb{R}^n$, l'implication réciproque est vraie.

Dans un espace métrique *compact*, nous avons une implication réciproque partielle au théorème 3.1.9.

Lemme 3.1.11. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique compact est compact.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme est une exercice (l'exercice 3.1.2). □

Exercices.

3.1.1 ([Coh03, Ex.4.5(2)]). (a) Démontrez que tout sous-ensemble fini d'un espace métrique est compact.

(b) Soit x la limite d'une suite convergent $\{x_n\}$ dans un espace métrique. Démontrez que l'ensemble $\{x, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ est compact.

3.1.2. Démontrez le lemme 3.1.11.

3.1.3. Supposez que X est un ensemble non vide avec la métrique discrète. L'espace X est-il compact ? Quels sous-ensembles de X sont compacts ?

3.1.4. Démontrez que l'espace de Baire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$ (voyez l'exemple 1.1.27) n'est pas compact.

3.2 Suites de fonctions et le théorème d'Arzelà–Ascoli

Définition 3.2.1. Supposez que F est une famille de fonctions à valeurs réelles (ou à valeurs complexes) sur un espace métrique (X, d) et D est un sous-ensemble de X.

(a) Nous disons que la famille F est *uniformément bornée* sur D s'il existe $M > 0$ tel que

$$f \in F,\ x \in D \implies |f(x)| \leq M.$$

(b) Nous disons que F est *équicontinue* au point $x \in D$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f \in F,\ x' \in D,\ d(x, x') < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

(c) Nous disons que F est *uniformément équicontinue* sur D si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f \in F,\ x, x' \in D,\ d(x, x') < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Remarques 3.2.2. (a) Notez que la définition du terme 'uniformément bornée' ne dépend pas d'une métrique sur F. Cependant, si $F \subseteq C[a, b]$ a la métrique uniforme, alors 'uniformément bornée' est équivalent à 'bornée'. Toutefois, pour les sous-ensembles de $C_1[a, b]$ les deux notions sont différentes (voyez l'exercice 3.2.1).

(b) De même, la définition de équicontinuité (uniforme) est indépendante d'une métrique sur F. Toutefois, si le domaine des fonctions dans une famille équicontinue F est $[a, b]$ et F est muni de la métrique uniforme, alors F est manifestement un sous-espace de $C[a, b]$.

(c) Nous pouvons généraliser la définition d'équicontinuité uniforme au cas où les fonctions de F prennent des valeurs dans un espace métrique fixe, au lieu de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ensuite, la condition devient que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$f \in F,\ x, x' \in D,\ d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

De la même façon, nous pouvons définir équicontinuité dans cette situation plus général.

(d) Nous pouvons aussi généraliser la définition d'uniformément bornée au cas où les fonctions de F prend des valeurs dans un 'espace normé' (voyez le chapitre 5).

(e) Le manuel [Coh03] utilise le terme 'équicontinue' pour ce que nous appelons 'uniformément équicontinue'.

Exemple 3.2.3. L'ensemble de fonctions $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ sur $[0,1]$ n'est pas uniformément équicontinue, même si chaque fonction est continue. Pour voir cela, noter que pour $0 < \epsilon < 1$, afin de nous assurer que

$$|x^n - 1^n| = 1 - x^n < \epsilon \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1,$$

il faut que $x > (1-\epsilon)^{1/n}$, ou $1 - x < 1 - (1-\epsilon)^{1/n}$. Puisue $(1-\epsilon)^{1/n} \to 1$ quand $n \to \infty$, il n'existe aucun $\delta > 0$ tel que

$$|1 - x| < \delta \implies |x^n - 1^n| < \epsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

Pour $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), nous avons des critères simples pour vérifier si un ensemble est compact. À savoir, les ensembles compacts sont précisément les ensembles fermés et bornés. Il se trouve que nous pouvons également développer des critères pour vérifier si un sous-ensemble de $C[a,b]$ est compact.

Théorème 3.2.4 (Théorème d'Arzelà–Ascoli)**.** *Un sous-ensemble F de l'espace métrique $C[a,b]$ est compact si est seulement si F est fermé, uniformément borné, et uniformément équicontinue.*

Démonstration. Supposons d'abord que F est fermée, uniformément bornée, et uniformément équicontinue. Nous allons montrer que F est compact. Supposons que $\{f_n\}$ est une suite dans F. Nous montrons que $\{f_n\}$ a une sous-suite convergente. La preuve implique six étapes.

Étape 1. Nous savons que $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ est dénombrable. Soit $\{x_1, x_2, \dots\}$ une énumération des éléments de cet ensemble.

Étape 2. Puisque F est uniformément bornée, nous pouvons trouver un $M > 0$ tel que

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_+.$$

En particulier, nous avons

$$|f_n(x_1)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

Donc la suite $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ est continue dans l'intervalle $[-M, M]$. Puisque $[-M, M]$ est compact, cette suite a une sous-suite convergente $\{f_{n_k}(x_1)\}$. Puis nous avons une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ de la suite $\{f_n\}$ qui converge ponctuellement au point x_1.

Écrivons cette suite comme $\{f_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$, au lieu de $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ pour que la notation soit un peu plus facile. Nous appliquons maintenant le même raisonnement que ci-dessus pour la suite $\{f^{(1)}\}$. Nous avons

$$|f_n^{(1)}(x_2)| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_+,$$

et donc la suite $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ de nombres réels a une sous-suite convergente $\{f_{n_k}^{(1)}(x_2)\}$. Nous avons donc choisi une suite $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ de $\{f_n^{(1)}\}$ qui converge ponctuellement aux points x_1 et x_2. Nous écrivons cette nouvelle suite comme $\{f_n^{(2)}\}$.

En continuant de cette manière, nous construisons des suites $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$ pour $m \in \mathbb{N}_+$ tels que pour chaque m, la suite $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$ est une sous-suite de $\{f_n\}$ qui converge ponctuellement aux points $x_1, x_2, \dots, x_m$. De plus, chaque suite est une sous-suite de celle qui la précède.

Étape 3. Nous avons construit des suites

$$\begin{array}{l} f_1^{(1)},\ f_2^{(1)},\ f_3^{(1)},\ \dots, \\ f_1^{(2)},\ f_2^{(2)},\ f_3^{(2)},\ \dots, \\ f_1^{(3)},\ f_2^{(3)},\ f_3^{(3)},\ \dots, \\ \qquad\vdots \end{array}$$

Soit $f^n = f_n^{(n)}$. Donc $\{f^n\}$ est la suite 'diagonale'. Pour chaque $m \geq n$, la suite $f^m, f^{m+1}, \dots$ est une sous-suite de $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$. Par conséquent, $f^m, f^{m+1}, \dots$ converge ponctuellement aux points $x_1, x_2, \dots, x_m$. Puisque l'addition d'éléments au début d'une suite de change pas sa convergence, la suite $\{f^n\}_{n=1}^\infty$ converge aussi aux points $x_1, x_2, \dots, x_m$. Puisque c'est vrai pour tout m, nous voyons que $\{f^n\}$ converge à tous les points $x_1, x_2, \dots$ (c.-à-d. tous les points de $\mathbb{Q} \cap [a, b]$).

Étape 4. Nous montrons maintenant que $\{f^n\}$ est une suite convergente. Choisissons $\epsilon > 0$. Puisque la suite $\{f^n\}$ est un sous-ensemble de F, qui est uniformément équicontinue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$n \in \mathbb{N}_+,\ x', x'' \in [a, b],\ |x' - x''| < \delta \implies |f^n(x') - f^n(x'')| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{3.1}$$

Choisissons K points rationnels dans $[a, b]$ tels que tous les points de $[a, b]$ se trouve à l'intérieur d'une distance de δ d'un de ces points rationnels (nous pouvons faire cela puisque $\delta > 0$ et $b - a < \infty$). En renumérotant si nécessaire, nous pouvons supposer que ces points rationnels sont $x_1, \dots, x_K$. Ainsi

$$\forall x \in [a, b]\ \exists\ i \in \{1, 2, \dots, K\} \text{ tel que } |x - x_i| < \delta.$$

Étape 5. Puisque $\{f^n(x_i)\}_{n=1}^\infty$ est une suite convergente pour chaque $i = 1, 2, \dots, K$ (notez que le nombre de valeurs de i est fini), nous pouvons choisir un $N > 0$ tel que

$$m, n > N \implies |f^n(x_i) - f^m(x_i)| < \frac{1}{3}\epsilon \quad \forall\ i = 1, 2, \dots, K.$$

Étape 6. Soit $x \in [a, b]$. Comme dans l'étape 4, nous pouvons choisir un point x_i, $i = 1, 2, \dots, K$, tel que $|x - x_i| < \delta$. Puis, d'après (3.1),

$$|f^n(x) - f^n(x_i)| < \frac{1}{3}\epsilon \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |f^n(x) - f^m(x)| \leq |f^n(x) - f^n(x_i)| + |f^n(x_i) - f^m(x_i)| + |f^m(x_i) - f^m(x)| \\ < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon, \end{aligned}$$

pour tous $m, n > N$. Puisque notre choix de $x \in [a, b]$ était arbitraire, il s'ensuit que

$$m, n > N \implies d(f^n, f^m) = \max_{a \leq x \leq b} |f^n(x) - f^m(x)| < \epsilon.$$

Ainsi $\{f^n\}$ est une suite de Cauchy dans F. Puisque F est un sous-ensemble fermé de l'espace métrique complet $C[a, b]$, il est complet d'après la proposition 1.5.4. Donc $\{f^n\}$ converge. Ainsi F est compact.

Il reste à montrer l'autre implication affirmé dans l'énoncé du théorème. Supposons que F est un sous-ensemble compact de $C[a, b]$. Nous savons déjà du théorème 3.1.5 que F est fermé. D'après le théorème 3.1.7, F est borné dans la métrique uniforme. Donc, il est uniformément borné. Il reste à montrer que F est uniformément équicontinue. Pour cela, nous allons utiliser les deux faits suivants.

(a) Un espace métrique est séquentiellement compact si et seulement s'il est compact dans le sens que vous avez appris dans les cours précédents (tout recouvrement ouvert a un sous-recouvrement fini). Nous reviendrons sur cette question plus tard dans le cours (voyez Theorem 4.5.9).

(b) Si une fonction f à valeurs réels est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors elle est *uniformément continue* sur cet intervalle. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

(Voyez la définition 5.5.1.) Vous avez peut-être vu cela dans les cours précédents. En tout cas, c'est laissé comme un exercice pour vous si vous ne l'avez pas vu (l'exercice 3.2.4). Voyez aussi le théorème 5.5.2, qui est plus général.

Avec ces faits, nous continuons avec la preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par ce qui précède, tous les éléments de F sont uniformément continue sur $[a, b]$. Par conséquent, pour tout $f \in F$, nous pouvons choisir un δ_f tel que

$$x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| < \delta_f \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon/3.$$

Soit

$$B_f = \{g \in F \mid d(f, g) < \epsilon/3\}.$$

Ici $d(f, g)$ est la distance dans la métrique uniforme. Puis pour tout $g \in B_f$, nous avons

$$x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| < \delta_f$$
$$\implies |g(x_1) - g(x_2)| \leq |g(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - g(x_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Les $\{B_f\}$ forment un recouvrement ouvert de F (puisque $f \in B_f$ pour tout $f \in F$). À proprement parler, nous n'avons pas encore discuté des ensembles ouverts dans les espaces métriques, mais nous allons voir que les 'boules' comme B_f sont ouverts dans les espaces métriques. Puisque F est compact, il existe un sous-recouvrement fini $\{B_{f_1}, \dots, B_{f_n}\}$. Soit $\delta = \min\{\delta_{f_1}, \dots, \delta_{f_n}\}$. Alors

$$x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| < \delta,\ g \in F \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon.$$

Donc F est uniformément continue. □

Remarque 3.2.5. Quelques sources (par exemple, [Coh03]), appelle le théorème 3.2.4 le théorème d'Ascoli est inclut seulement la partie 'si' (et pas 'seulement si').

Compte tenu du théorème 3.2.4, il est utile d'avoir des critères faciles pour vérifier si une famille de fonctions est uniformément équicontinue.

Lemme 3.2.6. *Supposons que F est une famille de fonctions dérivables définies sur le même intervalle $[a, b]$ et qu'il existe un nombre K tel que*

$$|f'(x)| \leq K \quad \forall\ f \in F,\ x \in [a, b].$$

Alors F est uniformément équicontinue.

Démonstration. Supposons que $\epsilon > 0$ et soit $\delta = \epsilon/K$. Alors

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| < K\delta = \epsilon,$$

pour tout $f \in F$. (Ici nous utilisons le théorème des accroissements finis ; en anglais, the Mean Value Theorem.) Donc F est uniformément équicontinue. □

Exercices.

3.2.1 ([Coh03, Ex. 4.5(7)]). Soit F un sous-ensemble de $C[a, b]$. Montrez que F est une famille uniformément bornée si et seulement si elle est bornée. Cependant, montrez que si F est considéré comme sous-ensemble de $C_1[a, b]$, alors F peut être bornée, mais pas uniformément bornée. (Voyez la remarque 3.2.2(a).)

3.2.2 ([Coh03, Ex. 4.5(8)]). Soient K et α des nombres positifs fixes et soit F un sous-ensemble de $C[a, b]$ telle que, pour tout $f \in F$ et tous points $x', x'' \in [a, b]$,

$$|f(x') - f(x'')| \leq K|x' - x''|^{\alpha}.$$

Montrez que F est équicontinue.

3.2.3 ([Coh03, Ex. 4.5(9)]). Soit F un sous-ensemble borné de $C[a, b]$. Montrez que l'ensemble de toutes les fonctions g, où

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad f \in F,\ a \leq x \leq b,$$

est uniformément borné est équicontinue.

3.2.4. Montrez que si une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue sur cet intervalle.

3.3 Compacité et fonctions entres les espaces métriques

Dans cette section, nous examinons l'interaction entre les ensembles compacts et les fonctions entre les espaces métriques.

Théorème 3.3.1. *Supposons que X, Y sont des espaces métriques et que $A: X \to Y$ est une fonction continue. Si S est un sous-ensemble compact de X, alors son image $A(S)$ est un sous-ensemble compact de Y.*

Démonstration. Si S est vide, le résultat est trivial. Supposons donc que S est non vide. Supposons que $\{y_n\}$ est une suite dans $A(S)$. Nous voulons montrer que $\{y_n\}$ a une sous-suite convergente. Pour chaque n, nous pouvons trouver $x_n \in S$ tel que $Ax_n = y_n$. Puisque S est compact, la suite $\{x_n\}$ a une sous-suite convergente $\{x_{n_k}\}$ avec une limite $x \in S$. Alors $Ax \in A(S)$. Puisque A est continue, nous avons $y_{n_k} = Ax_{n_k} \to Ax$. Ainsi $\{y_{n_k}\}$ est une sous-suite convergente. Par conséquent $A(S)$ est compact. □

Corollaire 3.3.2. *Si X est un espace métrique, $f: X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et S est un ensemble compact et non vide dans X, alors f atteint son maximum et minimum sur S. En d'autres termes, il existe des points $x_{\max}$ et $x_{\min}$ dans S tel que*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall\, x \in S.$$

Démonstration. D'après le théorème 3.3.1, $f(S)$ est compact. Ainsi, d'après le théorème 3.1.9, $f(S)$ est fermée et bornée. Mais nous savons des cours précédents que les sous-ensembles fermés et bornés de $\mathbb{R}$ contiennent un maximum et minimum. □

Théorème 3.3.3. *Supposons que S est un sous-ensemble compact et non vide d'un espace métrique (X, d) et que $x \in X$. Alors il existe un point $p \in S$ tel que $d(p, x)$ est un minimum.*

Démonstration. Définissons $f: X \to \mathbb{R}$ par $f(y) = d(y, x)$ pour $y \in X$. Donc, nous voulons trouver un minimum pour f sur S. Tout d'abord, nous affirmons que f est continue. Si $\{y_n\}$ est une suite dans X et $y_n \to y$, alors

$$|f(y_n) - f(y)| = |d(y_n, x) - d(y, x)| \leq d(y_n, y).$$

La dernière inégalité est vraie puisque

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, y) + d(y, x) \implies d(y_n, x) - d(y, x) \leq d(y_n, y),$$

et

$$d(y, x) \leq d(y, y_n) + d(y_n, x) \implies d(y_n, x) - d(y, x) \geq -d(y_n, y).$$

Par conséquent, $f(y_n) \to f(y)$ puisque $d(y_n, y) \to 0$. Cela montre que f est continue sur X. Donc, d'après le corollaire 3.3.2, f atteint son minimum a un point $p \in S$. □

Remarques 3.3.4. (a) Le théorème 3.3.3 n'implique pas que le point p est le *seul* point dans S tel que $d(x, p)$ est un minimum.

(b) Le théorème 3.3.3 ne vous donne aucune méthode pour trouver un tel point p.

Exemple 3.3.5. Fixons $n \in \mathbb{N}_+$ et $M > 0$. Soit

$$F = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_i \in [-M, M]\} \subseteq C[0,1].$$

Alors F est une famille de fonctions uniformément bornée est uniformément équicontinue sur l'intervalle $[0,1]$. Pour voir que F est uniformément bornée, notez que pour tout $f \in F$, nous avons

$$|f(x)| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \leq (n+1)M.$$

Pour voir que F est uniformément équicontinue, notez que pour tout $f \in F$, nous avons

$$|f'(x)| = |na_n x^{n-1} + \cdots + a_1| \leq n|a_n| + (n-1)|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| \leq \frac{n(n+1)}{2}M,$$

et donc nous pouvons appliquer le lemme 3.2.6. On peut aussi montrer que F est un sous-ensemble fermé de $C[0,1]$. Donc, d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli (le théorème 3.2.4), F est compact dans $C[0,1]$. Ainsi, d'après le théorème 3.3.3, pour toute fonction continue f sur l'intervalle $[0,1]$, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in [-M, M]$ tels que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - (a_n x^n + \cdots + a_0)|$$

est un minimum. Cela s'appelle une *approximation minimax* de f. Comme noté ci-dessus, il est possible que cette approximation n'est pas unique.

Typiquement l'avantage des approximations minimax réside dans le fait que nous trouvons des approximations des fonctions continues quelconques par les fonctions 'bonnes'. Cela a plusieurs applications, y compris la compression d'image (où on se rapproche des données dans une image avec quelques données plus simples qui prennent moins d'espace).

On vous a demandé de montrer dans l'exercice 2.1.2 que si la condition de contraction est affaiblie à $d(AxAy) < d(x,y)$ pour tous x, y, l'existence d'un point fixe n'est plus assurée. Cependant, dans un espace métrique *compact*, cette condition est suffisante.

Proposition 3.3.6. *Supposons que (X,d) est un espace métrique compact et que $A \colon X \to X$ est une fonction telle que*

$$d(Ax, Ay) < d(x,y) \quad \forall\ x, y \in X, x \neq y.$$

Alors A possède un et un seul point fixe dans X.

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergente dans X avec $x_n \to x$. Alors

$$0 \leq d(Ax_n, Ax) < d(x_n, x) \to 0,$$

et donc A est continue. (C'est essentiellement le même argument que nous avons utilisé pour montrer qu'une contraction est continue dans la démonstration de la proposition 2.1.2.) Définissons

$$B \colon X \to \mathbb{R}, \quad B(x) = d(x, Ax), \quad x \in X.$$

D'après l'exercice 1.4.1, nous avons

$$Bx_n = d(x_n, Ax_n) \to d(x, Ax) = Bx,$$

et donc B est continue. Puisque X est compact, le corollaire 3.3.2 implique que B atteint un minimum. Donc $By = \min_{x \in X} Bx$ pour un certain $y \in X$. Ainsi

$$d(y, Ay) \leq d(x, Ax) \quad \forall\, x \in X.$$

Supposons que $d(y, Ay) > 0$. Alors

$$B(Ay) = d(Ay, A(Ay)) < d(y, Ay) = By.$$

Mais cela contredit notre choix de y. Par conséquent, $d(y, Ay) = 0$ et donc $Ay = y$. Ainsi y est un point fixe de A.

Maintenant supposons que $Az = z$ pour un certain $z \in X$, $z \neq y$. Alors

$$d(y, z) = d(Ay, Az) < d(y, z),$$

qui est une contradiction. Ainsi y est le seul point fixe de A. □

Chapitre 4

Espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous passons d'espaces métriques à un cadre encore plus général : les espaces topologiques. Les espaces topologiques n'ont aucune notion de distance, mais ils ont des sous-ensembles ouverts et fermés. Nous verrons que nous pouvons donner à tout espace métriques la structure d'un espace topologique, mais l'inverse n'est pas vrai.

4.1 Définitions

Nous avons déjà vu quelques termes topologiques—à savoir 'compact' est 'fermé'.

Définition 4.1.1 (Topologie)**.** Une *topologie* sur un ensemble non vide X est une collection $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X avec les propriétés suivantes :

(T1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(T2) $\mathcal{T}$ est fermée sous les unions arbitraires : $\bigcup_{T\in\mathcal{S}} T \in \mathcal{T}$ pour tout $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$,

(T3) $\mathcal{T}$ est fermée sous les intersections finies : $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$ pour tour $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un *espace topologique* et les ensembles $T \in \mathcal{T}$ sont les *ensembles ouverts* dans $(X, \mathcal{T})$. On dit qu'un sous-ensemble S de X est *fermé* dans $(X, \mathcal{T})$ si son complément $S^{\complement} = X \setminus S$ est un sous-ensemble ouvert dans $(X, \mathcal{T})$. Nous parlons parfois de sous-ensembles ouverts et fermés de X (au lieu de $(X, \mathcal{T})$) lorsque la topologie est clair à partir du contexte.

Remarques 4.1.2. (a) Il résulte de (T3) que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts dans X est encore un ensemble ouvert dans X.

(b) Le cas où X a un seul élément sera parfois une exception à certains théorèmes que nous allons prouver. Ainsi, nous allons souvent supposer que X a au moins deux éléments.

Exemple 4.1.3 (Topologies discrète et triviale). Pour un ensemble (non vide) X, nous avons la *topologie discrète*

$$\mathcal{T}_{\max} = \{A \mid A \subseteq X\}$$

qui contient *tous* les sous-ensembles de X et la *topologie grossière* ou *topologie triviale* (anglais : *indiscrete topology* ou *trivial topology*)

$$\mathcal{T}_{\min} = \{\varnothing, X\}.$$

Définition 4.1.4 (Topologie moins/plus fine)**.** Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies sur un ensemble X tels que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, alors nous disons que $\mathcal{T}_1$ est *moins fine* (anglais : *weaker* ou *coarser*) que $\mathcal{T}_2$, et que $\mathcal{T}_2$ est *plus fine* (anglais : *stronger* ou *finer*) que $\mathcal{T}_1$.

Donc, sur un ensemble fixe, la topologie discrète est la topologie la plus fine et la topologie triviale est la topologie la moins fine.

Exemple 4.1.5*.* Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}, \\
\mathcal{T}_2 &= \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, X\}, \\
\mathcal{T}_3 &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, X\}, \\
\mathcal{T}_4 &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, X\}.
\end{aligned}$$

alors

(a) $\mathcal{T}_1$ *n'est pas* une topologie puisque $\{1, 2\}, \{2, 3\} \in \mathcal{T}_1$ mais $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{T}_1$.

(b) $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, et $\mathcal{T}_4$ sont tous les trois topologies puisque elles contiennent $\varnothing$ et X, et elles sont fermées sous unions arbitraires et intersection finies.

(c) $\mathcal{T}_3$ est moins fine que $\mathcal{T}_4$ (et $\mathcal{T}_4$ est plus fine que $\mathcal{T}_3$) puisque $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_4$.

(d) $\mathcal{T}_2$ n'est ni moins fine ni plus fine que $\mathcal{T}_3$ ou $\mathcal{T}_4$.

Proposition 4.1.6. *Dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, nous avons les propriétés suivantes :*

(a) L'ensemble vide, $\varnothing$, et tout l'espace entier, X, sont fermés.

(b) L'union d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermée

(c) L'intersection de toute famille d'ensembles fermés est fermée.

Démonstration. (a) Cela résulte du fait que $\varnothing^{\complement} = X$, $X^{\complement} = \varnothing$, et que X et $\varnothing$ sont ouverts.

(b) Supposons que $F_1, \dots, F_n$ sont des ensembles fermés. Selon les lois de De Morgan,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right)^{\complement} = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^{\complement}.$$

Puisque les F_i sont fermés, les $F_i^{\complement}$ sont ouverts et donc leur intersection $\bigcap_{i=1}^{n} F_i^{\complement}$ est aussi ouverte.

(c) Cette démonstration est une exercice (exercice 4.1.1).

□

Définition 4.1.7 (Intérieur et adhérence)**.** Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et que S est un sous-ensemble de X.

(a) *L'intérieur* de S est l'union de tous les ensembles ouverts contenus dans S. Il est noté $\operatorname{int} S$ ou S°. Donc
$$S^\circ = \cup\{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq S\}.$$
Si nous voulons mettre l'accent sur l'espace métrique ambtiante, nous écrivons $\operatorname{int}_X S$.

(b) *L'adhérence* (anglais : *closure*) de S est l'intersection de tous les ensembles fermés qui contiennent S. Elle est noté $\operatorname{cl} S$ ou $\bar{S}$. Donc
$$\bar{S} = \cap\{Z \subseteq X \mid Z^\complement \in \mathcal{T},\ S \subseteq Z\}.$$

Ainsi, S° est le plus grand ensemble ouvert contenu dans S et $\bar{S}$ est le plus petit ensemble fermé qui contient S.

Maintenant que nous avons défini des espaces topologiques en général, nous aimerions limiter notre attention aux espaces métriques. Nous aimerions définir une topologie naturelle sur *tout* espace métrique. Nous pouvons le faire de la manière suivante.

Définition 4.1.8 (Topologie associée à la métrique)**.** Supposons que (X, d) est un espace métrique.

(a) Pour $x_0 \in X$ et $r > 0$, l'ensemble
$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$
est appelé la *boule ouverte* dans X avec centre x_0 et rayon r.

(b) Un sous-ensemble U de X est *ouvert* si $U = \varnothing$ ou si pour tout $x \in U$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subseteq U$.

(c) La *topologie associée à la métrique* sur X (anglais : *metric topology*) est la collection d'ensembles ouverts décrits ci-dessus. Cette topologie est notée $\mathcal{T}_d$. Autrement dit, nous définissons
$$\mathcal{T}_d = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid \forall\, x \in U,\ \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \subseteq U\}.$$

Bien sûr, nous devons justifier que $\mathcal{T}_d$ est en fait une topologie. Il est trivial de voir que $\varnothing, X \in \mathcal{T}_d$. Supposons maintenant que $U_i \in \mathcal{T}_d$ pour tout $i \in I$ et soit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Nous voulons montrer que $U \in \mathcal{T}_d$ (c.-à-d. U est ouvert dans le sens défini ci-dessus). Soit $x \in U$. Alors $x \in U_i$ pour un certain $i \in I$. Mais puisque $U_i \in \mathcal{T}_d$, nous pouvons trouver un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_i \subseteq U$. Ainsi $U \in \mathcal{T}_d$.

Supposons maintenant que $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$. Nous voulons montrer que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Alors, nous pouvons trouver ϵ_1 et ϵ_2 tel que $B(x, \epsilon_1) \subseteq U_1$ et $B(x, \epsilon_2) \subseteq U_2$. Soit $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Alors
$$B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_1) \subseteq U_1 \quad \text{and} \quad B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_2) \subseteq U_2.$$

Par conséquent, $B(x, \epsilon) \subseteq U_1 \cap U_2$. Ainsi $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

Chaque fois que nous référons à un espace métrique comme un espace topologique, nous supposons que nous travaillons avec la topologie associée à la métrique.

Rappelons qu'un *singleton* est un ensemble avec un seul élément.

Exemple 4.1.9. Supposons que X est un espace métrique avec la métrique discrète. Alors pour tout $x \in X$, $\{x\} = B(x, 1)$ est un ensemble ouvert dans X. Puisque chaque sous-ensemble $A \subseteq X$ est une union de singletons (puisque $A = \bigcup_{a \in A}\{a\}$), on voit que tous les sous-ensembles de X sont ouverts. Ainsi, la topologie associée à cette métrique est la topologie discrète (ce qui est bon puisque nous utilisons le mot 'discret' pour les deux).

Exemple 4.1.10. Considérons l'espace métrique $C[a, b]$ et $f \in C[a, b]$. Alors, pour $r > 0$,

$$B(f, r) = \{g \in C[a, b] \mid f(x) - r \leq g(x) \leq f(x) + r \ \forall\ x \in [a, b]\}.$$

Exemples 4.1.11.

(a) $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, puisque chaque espace métrique est un sous-ensemble ouvert de lui-même.

(b) $\operatorname{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \varnothing$, puisque tout intervalle ouvert et non vide dans $\mathbb{R}$ (notons que les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts) contient un nombre irrationnel et donc ne peut pas être un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

(c) $\operatorname{int}_{\mathbb{R}}[a, b] = (a, b)$.

(d) $\operatorname{int}_{\mathbb{R}}\{0\} = \varnothing$.

(e) $\operatorname{int}_{\{0\}}\{0\} = \{0\}$.

(f) Dans un espace métrique avec la topologie discrète, tout ensemble est ouvert et donc l'intérieur de tout ensemble A est A lui-même. De même, tout ensemble est fermé et donc l'adhérence de tout ensemble A est A lui-même.

Exercices.

4.1.1. Démontrez la proposition 4.1.6(c).

4.1.2 ([Coh03, Ex. 5.7(1)]). Soient $X = \{a, b, c, d\}$,

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}, \quad \text{et}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}.$$

(a) Vérifiez que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont topologies sur X.

(b) Dans $(X, \mathcal{T}_1)$, trouvez les ensembles fermés, et trouvez les intérieurs et les adhérences de $\{a\}$, $\{c\}$, et $\{a, c\}$.

(c) Faîtes la même chose pour $(X, \mathcal{T}_2)$.

4.1.3. (a) Supposons que X est un ensemble non vide avec la topologie discrète $\mathcal{T}_{\max}$. Trouvez $\operatorname{int} S$ et $\bar{S}$ pour un sous-ensemble quelconque S de X.

(b) Supposons que X est un ensemble non vide avec la topologie triviale $\mathcal{T}_{\min}$. Trouvez $\operatorname{int} S$ et $\bar{S}$ pour un sous-ensemble quelconque S de X.

4.1.4. Démontrez que toute boule ouverte dans un espace métrique est en ensemble ouvert.

4.2 Ensembles fermés

Nous avons maintenant donné deux définitions d'ensembles fermés dans le contexte des espaces métriques. Nous avons défini un ensemble séquentiellement fermé dans la définition 1.5.1 et nous avons défini un ensemble fermé dans la topologie associée à la métrique. Ce serait très déroutant si ces deux définitions ne coïncident pas. Mais, nous allons voir maintenant que ces deux définitions sont équivalentes.

Théorème 4.2.1. *Supposons que (X, d) est un espace métrique avec la topologie $\mathcal{T}_d$ associée à la métrique. Un sous-ensemble de X est fermé dans $(X, \mathcal{T}_d)$ si et seulement s'il est séquentiellement fermé dans (X, d).*

Démonstration. Supposons que S est un ensemble fermé dans $(X, \mathcal{T}_d)$. Puisque le cas $S = \varnothing$ est trivial, nous supposons que $S \neq \varnothing$. Nous voulons montrer que S est séquentiellement fermé. Soit $\{x_n\}$ une suite dans S qui converge vers un point $x \in X$. Si $x \notin S$, alors $x \in S^\complement$. Puisque S est fermé, $S^\complement$ est ouvert. Ainsi, il existe une boule ouverte $B(x, \epsilon) \subseteq S^\complement$. Mais cela implique que $d(x_n, x) \geq \epsilon$ pour tous n, ce qui contredit le fait que $x_n \to x$. Ainsi $x \in S$ et donc S est séquentiellement fermé.

Supposons maintenant que S est séquentiellement fermé. Encore une fois, on peut supposer $S \neq \varnothing$. Nous voulons montrer que S est un ensemble fermé, à savoir que $S^\complement$ est ouvert. Si cela n'est pas vrai, alors il existe un point $x \in S^\complement$ tel que aucune boule ouverte avec centre x est contenu dans $S^\complement$. En d'autres termes, chaque boule ouverte centrée à x contient un point de S. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}_+$, nous pouvons choisir un point $x_n \in S$ avec $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Alors $\{x_n\}$ est une suite dans S avec $d(x_n, x) = \frac{1}{n} \to 0$. Par conséquent $\lim x_n = x$. Puisque S est séquentiellement fermé, $x \in S$. Mais cela contredit le fait que $x \in S^\complement$. Par conséquent $S^\complement$ est ouvert et donc S est fermé. □

Remarques 4.2.2. (a) Theorem 4.2.1 est valide seulement pour la topologie associée à la métrique. Il y a des espaces topologiques dans lequel 'fermé' n'est *pas* équivalent à 'séquentiellement fermée' (il existe des ensembles séquentiellement fermés qui ne sont pas fermés).

(b) Nous avons vu que nous pouvons transformer tout espace métrique dans un espace topologique en utilisant la topologie associée à la métrique. Il est naturel de se demander s'il est possible d'inverser cette procédure. Plus précisément, étant donné un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, pouvons-nous définir toujours une métrique d sur X tel que $\mathcal{T}_d =$

$\mathcal{T}$? La réponse est non. S'il est possible de définir une telle métrique, nous disons que l'espace est *métrisable*. Un exemple simple d'un espace topologique qui n'est pas métrisable est $X = \{1, 2\}$ avec la topologie triviale (voyez l'exercice 4.2.1). Il y a des théorèmes qui stipulent que tous les espaces topologiques satisfaisant certaines conditions supplémentaires sont métrisables.

Remarques 4.2.3. (a) Un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) peut être à la fois fermé *et* ouvert, donc une propriété n'exclut pas l'autre. Par exemple, X et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. Dans un espace métrique discrète, chaque sous-ensemble est ouvert et donc chaque sous-ensemble est également fermé.

(b) Il est également possible pour un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) d'être ni ouvert ni fermé. Par exemple, considérons un intervalle $[a, b)$, $a < b$, dans $\mathbb{R}$, avec la métrique usuelle. Il n'est pas ouvert car il ne contient aucune boule ouverte centrée à a et il n'est pas fermé parce que $A^\complement = (\infty, a) \cup [b, \infty)$ n'est pas ouvert (il ne contient aucune boule ouverte centrée à b). Par conséquent, si vous avez démontré qu'un sous-ensemble de X n'est pas ouvert, cela n'implique *pas* qu'il est fermé (et vice versa).

(c) Bien sûr, il existe des ensembles qui sont ouverts mais qui ne sont pas fermés (par exemple, (a, b), $a < b$, dans $\mathbb{R}$) et des ensembles qui sont fermé mais qui ne sont pas ouverts (par exemple, $[a, b]$, $a < b$, dans $\mathbb{R}$).

Proposition 4.2.4. *Tout singleton dans un espace métrique est fermé dans cet espace métrique.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique et soit $x \in X$. Il faut montrer que $\{x\}^\complement$ est ouvert. Choisissons $y \in \{x\}^\complement$. Alors $y \neq x$ et donc $d(x, y) > 0$. Soit $\epsilon = d(x, y)$. Alors la boule ouverte $B(y, \epsilon)$ ne contient pas x et donc $B(y, \epsilon) \subseteq \{x\}^\complement$. Puisque notre choix de y était arbitraire, $\{x\}^\complement$ est ouvert. □

Définition 4.2.5 (Voisinage, point d'accumulation, ensemble dérivé, point d'adhérence, point interieur)**.** Supposons que X est un espace topologique.

(a) Un *voisinage* (anglais : *neighbourhood*) d'un point $x \in X$ est un ensemble ouvert dans X qui contient x.

(b) Un point $x \in X$ est appelé un *point d'accumulation* (anglais : *cluster point*) pour $S \subseteq X$ si chaque voisinage de x contient un point de S distinct de x.

(c) L'ensemble de tous les points d'accumulation d'un sous-ensemble S de X est appelé *l'ensemble dérivé* de S, est il est noté S'.

(d) Un point $x \in X$ est appelé un *point d'adhérence* (anglais : *closure point* ou *adherent point*) pour $S \subseteq X$ si tout voisinage de x contient un point de S.

Remarques 4.2.6. (a) Notez que dans les définitions des points d'accumulation et points d'adhérence, ce n'est pas nécessaire que x soit un point de S.

(b) Notez la différence entre un point d'accumulation et un point d'adhérence. Dans la définition d'un point d'accumulation, nous exigeons que le voisinage de x contient un point de S *distinct de* x, tandis que dans la définition d'un point d'adhérence, nous permettons le point x lui-même. Ainsi, un point d'adhérence est soit un point d'accumulation pour S soit un point de S.

(c) Un point $x \in X$ est un point d'adhérence pour $S \subseteq X$ si et seulement si $x \in \bar{S}$. En d'autre termes, l'adhérence $\bar{S}$ d'un sous-ensemble S est précisément l'ensemble de ses points d'adhérence (d'où le terme 'point d'adhérence').

(d) Un point $x \in X$ qui est un point d'adhérence pour $S \subseteq X$ mais qui n'est pas un point d'accumulation, est appelé un *point isolé* de S.

(e) Parfois nous utilisons le terme 'voisinage de x' pour n'importe quel sous-ensemble qui contient une boule centrée à x. Alors nous utilisons le terme *voisinage ouvert* si nous exigeons que cet ensemble soit ouvert.

Proposition 4.2.7. *Supposons que S est un sous-ensemble d'un espace métrique X. Alors $x \in X$ est un point d'adhérence pour S si et seulement s'il existe une suite dans S qui converge à x.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est une exercice (exercice 4.2.2). □

Exemple 4.2.8. Soit $S = \{0\} \cup (1, 2]$, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(a) 0, 1 et 2 sont points d'adhérence de S (bien sûr, ils ne sont pas les seuls points d'adhérence).

(b) 1 et 2 sont points d'accumulation de S, mais 0 ne l'est pas.

(c) $\bar{S} = \{0\} \cup [1, 2]$.

Exemple 4.2.9. Supposons que X est un ensemble non vide avec la topologie discrète $\mathcal{T}_{\max}$. Alors $\{x\}$ est un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de X. Ainsi

(a) aucun point peut être un point d'accumulation pour un sous-ensemble de X,

(b) les seuls points d'adhérence d'un sous-ensemble S de X sont les point de S lui-même, et

(c) l'adhérence d'un sous-ensemble S de X est S lui-même.

Exemple 4.2.10. Supposons que X est un ensemble non vide avec la topologie triviale $\mathcal{T}_{\min}$. Alors pour tout $x \in X$, X est le seul voisinage de x. Donc tout point $x \in X$ est un point d'accumulation pour tout sous-ensemble de X, sauf $\{x\}$ et $\varnothing$. De plus, pour $A \subseteq X$, nous avons

$$\bar{A} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } A = \varnothing, \\ X & \text{si } A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Proposition 4.2.11. *Un ensemble S dans un espace topologique est fermé si est seulement s'il contient ses points d'accumulation, autrement dit, si est seulement si $S' \subseteq S$.*

Démonstration. Soit X un espace topologique et $S \subseteq X$. Supposons d'abord que S est fermé. Si $S = X$, alors $S' \subseteq S$ et nous avons fini. Sinon $S^{\complement}$ est un sous-ensemble non vide et ouvert de X. Pour tout $x \in S^{\complement}$, l'ensemble $S^{\complement}$ est lui-même un voisinage de x qui ne contient aucun de point de S. Donc $x \notin S'$. Ainsi, en prenant la contraposée, $x \in S' \implies x \in S$. Par conséquent $S' \subseteq S$.

Maintenant, supposons que $S' \subseteq S$. Nous voulons montrer que $S^{\complement}$ est ouvert. Si $S^{\complement} = \varnothing$, nous avons fini. Donc, supposons que $S^{\complement} \neq \varnothing$ et choisissons $x \in S^{\complement}$. Cela signifie que $x \notin S'$ (puisque $S' \subseteq S$). Ainsi x n'est pas un point d'accumulation pour S donc il existe un voisinage U_x de x avec $U_x \subseteq S^{\complement}$. Soit

$$V = \bigcup_{x \in S^{\complement}} U_x.$$

Alors $V \subseteq S^{\complement}$ et V est ouvert car il est une union d'ensembles ouverts. Puisque chaque point x de $S^{\complement}$ est contenu dans $U_x \subseteq V$, nous avons $S^{\complement} = V$. Par conséquent $S^{\complement}$ est ouvert et donc S est fermé. □

Remarque 4.2.12. Puisque un point d'adhérence de S est soit un point d'accumulation pour S, soit un point de S lui-même, une autre façon d'énoncer la proposition 4.2.11 est qu'un ensemble S dans un espace topologique est fermé si et seulement s'il contient ses points d'adhérence (et donc est égal à son ensemble de points d'adhérence, puisque chaque point de S est un point d'adhérence par définition).

Corollaire 4.2.13. *Un sous-ensemble S d'un espace métrique est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence : $S = \bar{S}$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la remarque 4.2.12 puisque tout sous-ensemble S est contenu dans son ensemble de points d'adhérence (puisque les points de S sont des points d'adhérence de S). □

Nous résumons maintenant quelques propriétés utiles des adhérences.

Théorème 4.2.14. *Soit (X, d) un espace métrique et soient $A, B \subseteq X$. Alors les énoncés suivants sont vrais :*

(a) $\overline{\varnothing} = \varnothing$,

(b) $A \subseteq \overline{A}$,

(c) si $A \subseteq B$, *alors* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ *(nous disons que l'adhérence est* monotone*)*

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Démonstration. Les démonstrations des ces énoncés sont des exercices (exercice 4.2.3). □

Définition 4.2.15 (Boule fermée)**.** Pour un point x_0 d'un espace métrique X et $r > 0$, la *boule fermé* avec centre x_0 et rayon r est l'ensemble

$$B^{\mathrm{cl}}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

On peut démontrer que $B^{\mathrm{cl}}(x_0, r)$ est un sous-ensemble fermé de X (voyez l'exercice 4.2.4). En outre, il est clair que la boule fermée $B^{\mathrm{cl}}(x, r)$ contient la boule ouverte correspondant $B(x, r)$. Cependant, en général, l'adhérence $\overline{B(x, r)}$ n'égale *pas* la boule fermée $B^{\mathrm{cl}}(x, r)$.

Exemple 4.2.16. Soit X un ensemble métrique avec la métrique discrète qui contient au moins deux points, et choisissons $x \in X$. Alors

$$\overline{B(x, 1)} = \overline{\{x\}} = \{x\},$$

mais

$$B^{\mathrm{cl}}(x, 1) = X \neq \{x\},$$

puisque $|X| \geq 2$.

Définition 4.2.17 (Point frontière)**.** Un point $x \in X$ d'un ensemble métrique est appelé un *point frontière* (anglais : *boundary point*) d'un sous-ensemble $A \subseteq X$ si pour tout $\epsilon > 0$, la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ contient des points de A *et* $A^{\complement}$.

Autrement dit, x est un point frontière pour A si et seulement si x est un point d'adhérence pour A *et* $A^{\complement}$.

En d'autres termes : x est un point frontière pour A si et seulement si x est un point d'adhérence pour A et il n'est pas un point intérieur de A (c.-à-d. un point de $\operatorname{int} A$).

Définition 4.2.18 (Frontière)**.** Supposons que A est un sous-ensemble d'un espace métrique X. La *frontière* (anglais : *boundary*) de A (dans X) est l'ensemble de tous les points frontières de A. Il est noté ∂A. Quand nous voulons souligner l'espace métrique ambiant, nous écrivons $\partial_X A$.

D'après les remarques ci-dessus, nous avons

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

Exemple 4.2.19. Nous avons $\partial_{\mathbb{R}}(0, 1) = \partial_{\mathbb{R}}[0, 1] = \partial_{\mathbb{R}}[0, 1) = \{0, 1\}$.

Exemple 4.2.20. Nous avons $\partial_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. En effet, chaque intervalle non vide dans $\mathbb{R}$ contient des points rationnels (points de $\mathbb{Q}$) et des points irrationnels (points de $\mathbb{Q}^{\complement}$). Cependant, $\partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \varnothing$, parce que l'intersection de tout voisinage d'un point de $\mathbb{Q}$ avec le complément de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ (ce qui est l'ensemble vide) est vide. Nous voyons ici que les points frontières d'un sous-ensemble (dans ce cas $\mathbb{Q}$) dépendent de l'espace métrique ambiant (dans ce cas, $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$).

Exemple 4.2.21. Nous avons $\partial_{\mathbb{R}}\varnothing = \varnothing$. L'ensemble vide n'a aucun point frontière.

Théorème 4.2.22. *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(a) $\overline{A} = X$.

(b) Tout point de X est un point d'adhérence pour A.

(c) *Pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$, l'intersection de la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ et A n'est pas vide.*

(d) *Tout sous-ensemble ouvert et non vide de X contient un point de A.*

Démonstration. (a) $\implies$ (d) : Soit V un sous-ensemble ouvert et non vide de X. Puisque V est non vide, il contient un point x. D'après (a) et la remarque 4.2.6(c), tout point de X et un point d'adhérence de A. Ainsi, x est un point d'adhérence de A et donc V, étant un voisinage de x, contient un point de A.

(d) $\implies$ (c) : C'est trivial, puisque toute boule ouverte est un ensemble ouvert et non vide.

(c) $\implies$ (b) : Soit $x \in X$. Pour tout $\epsilon > 0$, l'intersection de la boule $B(x, \epsilon)$ et A n'est pas vide. Donc x est un point d'adhérence pour A.

(b) $\implies$ (a) : Cela résulte de la remarque 4.2.6(c). □

Définition 4.2.23 (Sous-ensemble dense)**.** Un sous-ensemble A d'un espace métrique X est *dense* dans X s'il satisfait au moins une des (et donc toutes les) conditions équivalentes dans le théorème 4.2.22.

Théorème 4.2.24 (Théorème de densité)**.** *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (avec la métrique usuelle). Autrement dit, tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels ; ou, chaque intervalle non vide et ouvert dans $\mathbb{R}$ contient au moins un nombre rationnel ; ou l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même ; ou, tout élément de $\mathbb{R}$ est un point d'adhérence pour $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un nombre rationnel entre chaque deux nombres réels distincts. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et $a < b$. Nous allons trouver un nombre rationnel entre a et b.

Pour commencer, supposons que $a \geq 0$. Par l'axiome de d'Archimède, il existe un nombre naturel n tel que $n(b - a) > 1$, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Ce nombre n sera le dénominateur d'un point rationnel dans (a, b). Pour trouver le numérateur, soit

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N}_+ \;\middle|\; \frac{k}{n} < b \right\}.$$

Cet ensemble A est non vide, car il contient 1 : en effet, $1/n < b - a \leq b$. (Ici, nous utilisons la supposition que a est non négatif.) En appliquant à nouveau l'axiome d'Archimède, nous voyons que A est fini : en effet, il existe N tel que $N/n > b$, et chaque élément de A est inférieur à N. Par conséquent, il existe l'élément maximal A :

$$m = \max A.$$

Nous affirmons que $m/n \in (a, b)$. Nous avons $m/n < b$ par notre choix de A, et donc il suffit de vérifier que $m/n > a$. Supposons au contraire : $m/n \leq a$. Puisque $1/n < b - a$, nous pouvons voir que $(m + 1)/n < b$ et donc $m + 1 \in A$, ce qui contredit le fait que m est maximal.

Considérons maintenant les autres cas. Si $a < 0$ et $b > 0$, alors nous appliquons la conclusion précédente à l'intervalle $(0, b)$. Si $b \leq 0$, alors nous choisissons un point rationnel r dans l'intervalle (positif) $(-b, -a)$, alors l'élément $-r$ est rationnel et contenu dans (a, b). □

Exemple 4.2.25. Un sous-ensemble A d'un espace métrique X avec la métrique discrète est dense dans X si et seulement si $A = X$. Pour voir cela, soit $A \subsetneq X$ un sous-ensemble propre de X. Alors nous pouvons choisir $x \in X \setminus A$. La boule ouverte $B(x, 1)$ est seulement le singleton $\{x\}$ et donc n'intersect pas l'ensemble A. Ainsi A n'est pas dense dans X.

Exercices.

4.2.1. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini avec une métrique d. Montrez que la topologie associée à la métrique est la topologie discrète. En particulier, cela montre que tout ensemble fini avec une topologie autre que la topologie discrète n'est pas métrisable.

4.2.2. Démontrez la proposition 4.2.7.

4.2.3. Démontrez le théorème 4.2.14.

4.2.4. Supposons que (X, d) est un espace métrique. Montrez que, pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$, la boule fermée $B^{\mathrm{cl}}(x_0, r)$ est un sous-ensemble fermé de X.

4.2.5. (a) Montrez qu'un point x d'un espace métrique X est un point isolé si est seulement si $\{x\}$ est un ensemble ouvert. (Cette question n'est pas difficile—elle est presque une tautologie.)

(b) Montrez que l'espace de Baire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$ (voyez l'exemple 1.1.27) n'a aucun point isolé.

4.3 Espaces métriques séparables

Définition 4.3.1 (Séparable)**.** Un espace métrique X est *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense. Autrement dit, il existe $A \subseteq X$ tel que

(a) les éléments de A peuvent être écrits comme une suite $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, et

(b) A est dense dans X.

Remarque 4.3.2. On peut effectivement définir le terme 'séparable' pour tout espace topologique, mais nous allons nous concentrer sur les espaces métriques dans ce cours.

Exemples 4.3.3. (a) D'après le théorème de densité (le théorème 4.2.24), l'ensemble $\mathbb{R}$ est séparable puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) De même, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est séparable puisque l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.

(c) Un espace X avec la métrique discrète est séparable si et seulement si X lui-même est dénombrable.

(d) L'espace $\mathbb{N}_+$ est séparable puisqu'il est dénombrable. En fait, tout espace métrique dénombrable est séparable.

Théorème 4.3.4. *Tout sous-espace métrique d'un espace métrique séparable est séparable.*

Démonstration. Supposons que Y est un sous-ensemble non vide d'un espace métrique séparable (X, d). Fixons un sous-ensemble dénombrable et dense dans X :

$$A = \{a_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Nous voulons trouver un sous-ensemble dénombrable et dense de Y. La difficulté est que $Y \cap A$ ne doit pas être dense dans Y. En fait, il est possible que l'intersection de Y et A soit vide (par exemple $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Q}^\complement$).

Fixons un élément $y' \in Y$. Pour chaque deux nombres naturels $n, k \geq 1$, considérons la boule $B(a_n, 1/k)$. Si cette boule intersect Y, puis choisissons un point dans l'intersection $B(a_n, 1/k) \cap Y$ et le notons $y_{n,k}$. Si cette intersection est vide, alors choisissons $y_{n,k} = y'$. En d'autres termes,

$$y_{n,k} = \begin{cases} \text{un point dans } B(a_n, 1/k) \cap Y, & \text{si } B(a_n, 1/k) \cap Y \neq \varnothing, \\ y', & \text{autrement.} \end{cases}$$

Soit

$$B = \{y_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}_+\}.$$

Il est clair que B est un sous-ensemble dénombrable de Y. Il reste à montrer que B est dense dans Y. Soient $y \in Y$ et $\epsilon > 0$. Choisissons un nombre naturel $k \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque A est dense dans X, il existe un point de A contenue dans $B(y, 1/k)$. Fixons $n \in \mathbb{N}_+$ tel que $a_n \in B(y, 1/k)$. En d'autres termes, choisissons n tel que

$$d(a_n, y) < \frac{1}{k}.$$

La boule $B(a_n, 1/k)$ intersect Y (en particulier, il contient $y \in Y$). Ainsi le point $y_{n,k} \in B$ associé à ce couple de nombres naturels est contenu dans l'intersection $B(a_n, 1/k) \cap Y$. Maintenant, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(y, y_{n,k}) \leq d(y, a_n) + d(a_n, y_{n,k}) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \epsilon.$$

Par conséquent, $y_{n,k}$ est contenue dans $B(y, \epsilon)$. Puisque $y \in Y$ et $\epsilon > 0$ étaient arbitraires, le sous-ensemble B est en effet dense dans Y, comme désiré. □

Proposition 4.3.5. *L'espace métrique ℓ^∞ n'est pas séparable.*

Démonstration. D'après le théorème 4.3.4, il suffit de trouver un sous-espace de ℓ^∞ qui n'est pas séparable. Soit X l'ensemble de toutes les suites dont toutes les composantes sont 0 ou 1. Il est évident que ces suites sont bornées et donc $X \subseteq \ell^\infty$. Nous affirmons que la métrique induite sur X est la métrique discrète. Il est claire que, si $x, y \in X$ et $x = y$, alors $d_\infty(x, y) = 0$. Supposons que $x \neq y$. Alors $x_i \neq y_i$ pour un certain i. Pour chaque n, x_n et y_n sont soit 0 soit 1 et donc $|x_n - y_n|$ égale 0 ou 1. Puisque $|x_i - y_1| = 1$, nous avons

$$d_\infty(x, y) = \sup_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = 1.$$

Nous allons maintenant montrer que X n'est pas dénombrable, ce qui signifie, d'après l'exemple 4.3.3(c), que l'espace X n'est pas séparable, terminant l'argument. Il suivra que X est dénombrable si nous pouvons montrer que pour toute suite $\{x_n\}$ dans X, il existe un élément $x' \in X$, qui n'est pas dans cette suite.

Écrivons les éléments de la suite $\{x_n\}$ comme un tableau :

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{1,n}, \dots) \\
x_2 &= (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{2,n}, \dots) \\
x_3 &= (x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \dots, x_{3,n}, \dots) \\
&\vdots \\
x_n &= (x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots, x_{n,n}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Notons que chaque composante $x_{n,k}$ égale 0 ou 1. Maintenant, définissons une suite $x' = (x'_1, x'_2, \dots)$ par

$$x'_n = 1 - x_{n,n}.$$

Alors x' et x_n diffèrent au moins dans la n-ième composante et donc

$$x' \neq x_n \text{ pour tout } n.$$

Ainsi X n'est pas dénombrable. D'où X est un sous-ensemble métrique de ℓ^∞ qui n'est pas séparable et donc ℓ^∞ n'est pas séparable. □

L'argument ci-dessus que nous avons utilisé pour montrer que X n'est pas dénombrable est appelé *l'argument de la diagonale de Cantor*.

Exercices.

4.3.1. Montrez que $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

4.3.2. Montrez que l'espace de Baire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$ (voyez l'exemple 1.1.27) est séparable. *Indice :* Pensez à des suites finies.

4.4 Connexité

Définition 4.4.1 (Disjoint)**.** Nous disons que deux ensembles A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \varnothing$. Parfois, nous écrivons $A \sqcup B$ pour l'union de A et B quand ces deux ensembles sont disjoints. Donc, l'énoncé '$X = A \sqcup B$' veut dire que $X = A \cup B$ et $A \cap B = \varnothing$.

Définition 4.4.2 (Connexe)**.** Un espace topologique X est *connexe* si X n'est pas l'union de deux sous-ensembles disjoints, ouverts et non vides. Autrement dit, X est connexe s'il n'existe pas deux sous-ensembles ouverts et non vides $U, V \subseteq X$ tels que $X = U \sqcup V$.

Remarques 4.4.3. (a) Notez que, dans la définition ci-dessus, $U^{\complement} = V$ et $V^{\complement} = U$. Donc U et V sont ouverts *et* fermés. Dans la définition, nous pouvons remplacer le mot 'ouvert' par 'fermé' partout.

(b) Quand nous parlons d'espaces métriques connexes et non connexes, nous parlons toujours de la topologie associée à la métrique. Quand nous disons que Y est un sous-ensemble connexe ou non connexe d'un espace métrique (X, d), nous voulons dire que Y est connexe ou non connexe comme un espace métrique (c.-à-d. avec la métrique induite).

(c) Voici une définition équivalente de connexe que nous utiliserons dans les preuves : Un espace topologique X est connexe si chaque fois que $X = U \sqcup V$ pour certains ensembles ouverts U, V, et U est non vide, alors $U = X$ et ainsi V est vide.

Exemples 4.4.4. (a) Tout ensemble avec la métrique discrète est non connexe tant qu'elle contient au moins deux points. Pour le voir, supposons que X est un ensemble muni de la métrique discrète et que X a au moins deux points. Choisissons $x \in X$ et définissons $U = \{x\}$, $V = X \setminus \{x\}$. Puisque tout sous-ensemble d'un espace métrique avec la métrique discrète est ouvert, U et V sont ouverts. Ils sont aussi non vides (U est non vide puisque X a au moins deux points). Il est claire qu'ils sont aussi disjoints.

(b) Tout singleton $X = \{x\}$ est connexe.

(c) L'ensemble de nombres rationnels $\mathbb{Q}$ avec la métrique usuelle n'est pas connexe. En effet, soit

$$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \pi\}, \quad V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \pi\}.$$

(Nous pouvons choisir n'importe quel nombre irrationel au lieu de π.) Il est évident que $\mathbb{Q} = U \sqcup V$. Aussi, U et V sont non vides puisque, par exemple, $0 \in U$ et $4 \in V$.

Il reste à montrer que U et V sont ouverts. Nous montrons que U est ouvert. La démonstration que V est ouvert est similaire. Choisissons $x \in U$ et soit $\epsilon = \pi - x$, qui est positif puisque $x < \pi$. Montrons que $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Supposons que $z \in B(x, \epsilon)$. Ainsi, par définition, $z \in \mathbb{Q}$ et $|z - x| < \epsilon$. Si $z - x < 0$, alors $z < x < \epsilon$ et donc $z \in U$. D'autre part, si $z - x > 0$ alors

$$z - x = |z - x| < \epsilon \implies z < x + \epsilon = \pi \implies z \in U.$$

Par conséquent, $B(x, \epsilon) \subseteq U$ et donc (puisque notre choix de $x \in U$ était arbitraire), U est ouvert.

Théorème 4.4.5. *Tout intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration. Nous allons prouver le résultat pour l'intervalle $I = [0, 1]$, juste pour éviter des complications de notation. Supposons que $I = U \sqcup V$ où U et V sont ouverts. Puisque 0 appartient à exactement un d'entre eux, nous pouvons supposer sans perte de généralité, et renommer U et V si nécessaire, que $0 \in U$. Maintenant, nous allons montrer que $V = \varnothing$.

Définissons un ensemble
$$A = \{a \in I \mid [0, a] \subseteq U\}.$$
L'ensemble A n'est pas vide, car il contient zéro : $[0, 0] = 0 \subseteq U$. Aussi, A possède un majorant (par exemple, 1). Donc l'ensemble A possède une borne supérieure (c.-à-d. un supremum). Nous dénotons cette borne supérieure b :
$$b = \sup A.$$
Nous allons prouver que $1 \in A$. Cela achèvera la preuve immédiatement, parce que cela signifierait que $[0, 1] \subseteq U$, autrement dit, $[0, 1] = U$ et $V = \varnothing$. Avec ce but, nous allons établir, premièrement, que $b \in A$, et, deuxièmement, que $b = 1$.

Pour tout $a \in A$, nous avons $[0, a] \subseteq U$ et clairement
$$[0, b) \subseteq \bigcup_{a \in A} [0, a].$$
Donc $[0, b) \subseteq U$. Puisque l'adhérence est monotone, $\mathrm{cl}_I[0, b) \subseteq \mathrm{cl}_I U$. Notons que $\mathrm{cl}_I[0, b) = [0, b]$, et $\mathrm{cl}_I U = U$ (U est fermé dans I puisque son complément, $U^{\complement} = V$, est ouvert). Ces faits impliquent que $[0, b] \subseteq U$ et donc $b \in A$.

Il reste à montrer que $b = 1$. Nous montrons cela par contradiction. Supposons que $b < 1$. Puisque $b \in U$ et U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(b, \epsilon) \subseteq U$, où la boule ouverte est dans I. Sans perte de généralité et diminuer ϵ si nécessaire, nous pouvons supposer que $\epsilon \leq 1 - b$. Maintenant nous avons
$$[0, b + \epsilon/2] = [0, b] \cup [b, b + \epsilon/2] \subseteq [0, b] \cup B(b, \epsilon) \subseteq U.$$
Donc $b+\epsilon/2 \in A$. Mais cela est une contradiction, puisque b est, par sa définition, un majorant pour A. Nous concluons que $b = 1$, donc $1 \in A$ et la démonstration est terminé. □

Lemme 4.4.6. *Supposons que Y est un sous-espace d'un espace métrique X. Si U est un sous-ensemble ouvert de X, alors $U \cap Y$ est un sous-ensemble ouvert de Y.*

Démonstration. Choisissons un point quelconque $y \in U \cap Y$. Puisque $y \in U$ et U est ouvert dans X, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_X(y, \epsilon) \subseteq U$, où nous utilisons la lettre souscrite X pour indiquer que
$$B_X(y, \epsilon) = \{x \in X \mid d(y, x) < \epsilon\}$$
est la boule construite dans X. Maintenant considérons la boule avec le même centre et rayon, mais construit dans Y :
$$B_Y(y, \epsilon) = \{x \in Y \mid d(y, x) < \epsilon\}.$$
Il est évident que $B_Y(y, \epsilon) = B_X(y, \epsilon) \cap Y$. Ainsi, $B_Y(y, \epsilon) \subseteq U \cap Y$ et donc y est un point intérieur de $U \cap Y$. Puisque y était un point quelconque de $U \cap Y$, cet ensemble est ouvert. □

Rappelons quelques notions de la théorie d'ensembles. Si $\mathcal{C}$ est une collection d'ensembles, alors

$$\cup\mathcal{C} = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \mid x \in A \text{ pour au moins un } A \in \mathcal{C}\}, \quad \text{et}$$
$$\cap\mathcal{C} = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \mid x \in A \text{ pour tout } A \in \mathcal{C}\}.$$

Théorème 4.4.7. *Si X est un espace métrique et $\mathcal{C}$ est une collection de sous-ensembles connexes de X tels que*

(a) $\cup\mathcal{C} = X$, *et*

(b) $\cap\mathcal{C} \neq \varnothing$,

alors X est connexe.

Démonstration. Supposons que $X = U \sqcup V$ pour des ensembles ouverts U, V. Puisque $\cap\mathcal{C} \neq \varnothing$, il existe un point x_0 contenue dans tous les éléments de $\mathcal{C}$. Alors x_0 est un élément de U ou V, mais pas les deux. En changeant les noms de U et V si nécessaire, nous pouvons supposer que $x_0 \in U$. Maintenant choisissons un point quelconque $x \in X$. Puisque $\cup\mathcal{C} = X$, nous avons $x \in C$ pour un certain $C \in \mathcal{C}$. D'après le lemme 4.4.6, les ensembles $U \cap C$ et $V \cap C$ sont ouverts dans C. Puisque $X = U \sqcup V$, nous avons

$$C = (U \cap C) \sqcup (V \cap C).$$

Puisque C est connexe, un d'entre eux est vide. Puisque $x_0 \in U \cap C$, nous avons que $V \cap C = \varnothing$. Ainsi $x \in U \cap C$ et donc $x \in U$. Puisque x était arbitraire, nous avons $X = U$. □

Corollaire 4.4.8. *Tout intervalle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, tout ensemble sous la forme*

$$[a,b],\ (a,b),\ [a,b),\ (a,d],\ (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,\infty),$$

est connexe.

Démonstration. Pour chacun de ces intervalles, nous pouvons trouver une collection $\mathcal{C}$ qui satisfait les hypothèses du théorème 4.4.7. Par exemple,

$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n].$$

Les intervalles fermés $[-n,n]$ sont connexes d'après le théorème 4.4.5 et ils contiennent le point 0.

Pour l'inervalle $[a,b)$, nous avons

$$[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a, b - \frac{b-a}{n}\right].$$

La démonstration des autres cas est une exercice (exercice 4.4.2). □

Exercices.

4.4.1. Montrez que l'espace de Baire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$ (voyez exemple 1.1.27) n'est pas connexe.

4.4.2. Complétez la démonstration du corollaire 4.4.8.

4.5 Ensembles compacts

Dans la section 3.1, nous avons discuté des espaces métriques séquentiellement compacts. Maintenant nous discutons plus la notion d'un ensemble compact. Nous allons donner la définition d'un espace topologique compact, puis voir que, dans le cas d'un espace métrique, cette définition est d'accord avec notre définition de compacité séquentielle.

Les espaces métriques ont une propriété utile de 'séparabilité'. À savoir, dans un espace métrique (X, d) qui contient au moins deux points x et y, nous pouvons trouver des boules ouvertes (qui sont ouvertes dans la topologie métrique) centrées à x et y qui sont disjoints. Par exemple, nous pouvons prendre les boules ouvertes $B(x, \epsilon)$ et $B(y, \epsilon)$ avec $\epsilon = d(x, y)/2$. Nous avons un nom spécial pour les espaces topologiques avec cette propriété.

Définition 4.5.1 (Espace de Hausdorff)**.** Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est appelé un *espace de Hausdorff* (ou *espace séparé*), et $\mathcal{T}$ est appelée une *topologie de Hausdorff*, si pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un voisinage U_x de x et un voisinage U_y de y tel que $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Comme indiqué ci-dessus, les espaces métriques sont Hausdorff. Tout espace métrique $(X, \mathcal{T}_{\max})$ avec la topologie discrète est Hausdorff. Pour tous points distincts $x, y \in X$, les ensembles $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des voisinages disjoints qui les contiennent. Cependant la topologie indiscret $\mathcal{T}_{\min}$ n'est jamais séparé (si l'espace a au moins deux points) parce que tout ensemble ouvert et non vide est tout l'espace, et donc il est impossible de trouver des voisinages disjoints contenant deux points distincts.

Définition 4.5.2 (Recouvrement ouvert)**.** Supposons que S est un sous-ensemble d'un espace topologique X. Un *recouvrement ouvert* de S est une collection de sous-ensembles ouverts de X dont l'union contient S. Un recouvrement ouvert est *fini* s'il est une collection finie. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des recouvrement ouverts, alors $\mathcal{C}_1$ est un *sous-recouvrement* de $\mathcal{C}_2$ si tout sous-ensemble ouvert dans $\mathcal{C}_1$ est aussi un élément de $\mathcal{C}_2$ (c.-à-d. $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$).

Définition 4.5.3 (Ensemble compact)**.** Un sous-ensemble S d'un espace topologique X est appelé *compact* si tout recouvrement ouvert de S contient un sous-recouvrement fini de S. Autrement dit, S est compact si toute collection de sous-ensembles ouverts de X dont l'union contient S a une sous-collection finie dont l'union contient S.

Notez que cette définition est différente de la définition de *séquentiellement compact*. Cependant, nous verrons bientôt que pour les espaces métriques, les deux définitions sont équivalentes (voir le théorème 4.5.9).

Rappelons que nous avons montré que des sous-ensembles séquentiellement compacts des espaces métriques sont fermés (théorème 3.1.5). Nous voyons maintenant qu'il y a un théorème analogue dans le cadre des espaces topologiques.

Théorème 4.5.4. *Tout sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Démonstration. Soit S un sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff. Si $S = X$, alors S est manifestement fermé dans X. Donc, nous supposons $S \neq X$. Rappelons de la proposition 4.2.11 que S est fermé s'il contient ses points d'accumulation, autrement dit, si $S' \subseteq S$. Nous allons démontrer que $S' \subseteq S$ en montrant que si $x \in S^{\complement}$, alors $x \notin S'$ (c.-à-d. x n'est pas un point d'accumulation de S) . Choisissez un point $x \in S^{\complement}$ quelconque. Puisque X est Hausdorff, pour tout $y \in S$, il existe des voisinages disjoints U_y de x et V_y de y. Puis la collection $\{V_y \mid y \in S\}$ est un recouvrement ouvert de S. Puisque S est compact, il y a un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, il existe un ensemble fini

$$\{V_{y_1},\ V_{y_2},\ \ldots,\ V_{y_n}\}$$

qui est un recouvrement de S. Soit $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Puisque U est une intersection finie d'ensembles ouverts, U est ouvert. (Ici, il faut que le recouvrement soit *fini*.) Puisque $x \in U_{y_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, nous avons $x \in U$. Par conséquent, U est un voisinage de x. Aussi, U et $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ sont disjoints, et donc U et S sont disjoints. Ainsi, x n'est pas un point d'accumulation de S. $\square$

Dans le théorème 4.5.4, il faut que l'espace soit Hausdorff. Pour voir cela, considérons l'exemple suivant.

Exemple 4.5.5. Soit X un ensemble infini et définissons

$$\mathcal{T} = \{T \subseteq X \mid T = \varnothing \text{ ou } T^{\complement} \text{ est fini}\}.$$

On peut montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie (exercice 4.5.1). Nous allons montrer que tout sous-ensemble de X est compact. Soit $S \subseteq X$ et soit $\mathcal{C}$ un recouvrement ouvert de S. Choisissons un $U \in \mathcal{C}$ (non vide). Alors U est ouvert et donc $U^{\complement}$ est fini. Ainsi $S \cap U^{\complement}$ est également finie. Supposons que $S \cap U^{\complement} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il y a un $U_i \in \mathcal{C}$ tel que $x_i \in U_i$ (puisque $\mathcal{C}$ est un recouvrement de S). Alors $\{U, U_1, \ldots, U_n\}$ est une sous-recouvrement fini de S. Cependant, X contient certainement des sous-ensembles qui ne sont pas fermées (par exemple, tout sous-ensemble propre et infini de X). Ainsi X contient des sous-ensembles compacts qui ne sont pas fermés. Notons que X n'est pas Hausdorff puisque l'intersection de n'importe quels deux ensembles ouverts et non vides n'est pas vide. En effet, si U et V sont des sous-ensembles ouverts et non vides de X, alors $U^{\complement}$ et $V^{\complement}$ sont finis. Ainsi $(U \cap V)^{\complement} = U^{\complement} \cup V^{\complement}$ est fini. Donc $U \cap V$ doit être infinie (car X est infini).

Définition 4.5.6 (Propriété de Bolzano–Weierstrass, dénombrablement compact)**.** Nous disons qu'un espace métrique X a la *propriété de Bolzano–Weierstrass* si tout sous-ensemble infini de X possède un point d'accumulation. Nous disons que X est *dénombrablement compact* si tout recouvrement ouvert et dénombrable (c.-à-d. une collection dénombrable d'ensembles ouverts dont l'union égale X) possède un sous-recouvrement fini.

Avant que nous démontrons l'équivalence de 'compact' et 'séquentiellement compact', nous montrons un résultat technique.

Définition 4.5.7. Supposons que S est un sous-ensemble non vide d'un espace métrique X et $\epsilon > 0$. Un sous-ensemble Z de X est appelé un *ϵ-filet* (anglais : *ϵ-net*) pour S si

$$S \subseteq \bigcup_{z \in Z} B(z, \epsilon).$$

Autrement dit, pour tout $x \in S$, il existe $z \in Z$ tel que $d(x, z) < \epsilon$. Un ϵ-filet S est *fini* si Z est un ensemble fini.

Lemme 4.5.8. *Tout sous-ensemble non vide et séquentiellement compact d'un espace métrique possède un ϵ-filet fini pour tout $\epsilon > 0$.*

Démonstration. Supposons que S est un sous-ensemble non vide et séquentiellement compact d'un espace métrique (X, d) et supposons que pour un certain $\epsilon > 0$, S n'a aucun ϵ-filet fini. Choisissons un point quelconque $x_1 \in S$. Puisque l'ensemble $\{x_1\}$ ne peut pas être un ϵ-filet pour S (puisque il est fini), il existe un point $x_2 \in S$ tel que $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Encore une fois, l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ ne peut pas être un ϵ-filet pour S (puisque il est fini), et donc il existe un point $x_3 \in S$ tel que $d(x_3, x_1) \geq \epsilon$ et $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$. En continuant dans cette manière, nous construisons une suite

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \quad \text{tel que} \quad d(x_m, x_n) \geq \epsilon \ \forall \ m \neq n.$$

Cette suite n'a aucune sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que S est séquentiellement compact. Par conséquent, S a un ϵ-filet fini pour tout $\epsilon > 0$. □

Théorème 4.5.9 (Équivalence des deux notions de compacité)**.** *Supposons que (X, d) est un espace métrique. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) X est compact,

(b) X est dénombrablement compact,

(c) X a la propriété de Bolzano–Weierstrass,

(d) X est séquentiellement compact.

Démonstration. Nous montrons

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (b) \implies (a).$$

Il est claire que (a) implique (b).

(b) $\implies$ (c) : Nous le démontrons par contradiction. Supposons que X est dénombrablement compact, mais n'a pas la propriété de Bolzano–Weierstrass. Alors X a un sous-ensemble infini Y qui n'a aucun point d'accumulation. Soit S un sous-ensemble infini et dénombrable de Y. Puisque tout point d'accumulation de S serait un point d'accumulation de Y, S n'a aucun point d'accumulation. Par conséquent, tout point $x \in S$ a un voisinage U_x qui ne contient aucun autre point de Y. Rappellons (proposition 4.2.11) qu'un espace topologique est fermé si et seulement s'il contient ses points d'accumulation. Par conséquent, (dans une manière triviale) S est fermé, puisque il n'a aucun point d'accumulation. Ainsi $S^{\complement}$ est ouvert. Alors

$$\left\{S^{\complement}\right\} \cup \{U_x \mid x \in S\}$$

est un recouvrement ouvert et dénombrable de X. Puisque X est dénombrablement compact, il a un sous-recouvrement fini qui contient S. Mais cela n'est pas possible, puisque tout $x \in S$ est contenu seulement dans U_x (et il n'est pas contenu dans aucun U_y, $y \neq x$, ni dans $S^{\complement}$) et S est infini. Par conséquent, (b) $\implies$ (c).

(c) $\implies$ (d) : Maintenant, supposons que X a la propriété de Bolzano–Weierstrass. Soit $\{x_n\}$ une suite dans X. Si l'image de cette suite est finie, il faut qu'il existe au moins un point qui apparaît une infinité de fois dans la suite et donc il y a une sous-suite convergente (il suffit de prendre la suite dont les termes sont tout ce point). Sinon, l'image de la suite $\{x_n\}$ est infinie et donc possède un point d'accumulation x. Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, la boule ouverte $B(x, 1/k)$ est un voisinage de x et donc il contient un point x_{n_k} dans la suite, avec $x_{n_k} \neq x$. (Puisque chaque point d'accumulation pour $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ et aussi un point d'accumulation pour $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_+$, nous pouvons supposer que la fonction $k \mapsto n_k$ est croissante.) Alors $d(x_{n_k}, x) < 1/k$ pour tous k et donc $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ est une sous-suite convergente de $\{x_n\}$. Par conséquent X est séquentiellement compact. Ainsi (c) $\implies$ (d).

(d) $\implies$ (b) : Nous démontrons cela par contradiction. Supposons que X est séquentiellement compact et qu'il contient un recouvrement ouvert et dénombrable $\{T_1, T_2, \ldots\}$ sans sous-recouvrement fini. Alors aucune des unions finies $\bigcup_{k=1}^{n} T_k$, $n \in \mathbb{N}_+$, peuvent être égales à X. Ainsi, tous les ensembles

$$U_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n} T_k\right)^{\complement},\ n \in \mathbb{N}_+,$$

sont non vides. Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, choisissons un point $x_n \in U_n$. Ainsi $x_n \notin T_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Nous montrons que $\{x_n\}$ n'a aucune sous-suite convergente, ce que contredit le fait que X est séquentiellement compact. Supposons qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge à une limite x. Alors, puisque $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ est un recouvrement de X, il faut que $x \in T_N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}_+$. Puisque $x_{n_k} \to x$ quand $k \to \infty$, il existe un K tel que $x_{n_k} \in T_N$ pour tout $k > K$ (puisque T_N est un voisinage de x, donc il contient une boule $B(x, \epsilon)$ et d'après la définition de convergence, il existe un K tel que $k > K$ implique $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$). Toute plus grande valeur de K satisfait la même condition et donc nous pouvons supposer que $K > N$. Puisque $n_k \geq k$ pour tout k, nous avons $x_{n_{K+1}} \in T_N$, qui est une contradiction.

(b) $\implies$ (a) : Notre stratégie pour le démontrer sera de réduire tout recouvrement ouvert à un recouvrement dénombrable. Supposons que X est dénombrablement compact. Alors, comme nous l'avons déjà montré, il est séquentiellement compact et donc, d'après le lemme 4.5.8, il a un ϵ-filet fini pour tout $\epsilon > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, X a un $\left(\frac{1}{n}\right)$-filet fini $E\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1}{n}\right)$$

est dénombrable (puisque il est une union dénombrable d'ensembles finis). Par conséquent,

$$\mathcal{V} = \{B(u, 1/n) \mid u \in F,\ n \in \mathbb{N}_+\}$$

est un ensemble dénombrable de boules ouvertes dans X. Maintenant, soit x un point quelconque de X et U un voisinage de x. Alors nous pouvons trouver $m \in \mathbb{N}_+$ tel que $B(x, 1/m) \subseteq U$ et $u \in E(1/2m) \subseteq F$ tel que $d(u, x) < 1/2m$. Par conséquent,

$$x \in B(u, 1/2m) \subseteq B(x, 1/m) \subseteq U.$$

Ainsi il existe une boule ouverte $B \in \mathcal{V}$ telle que $x \in B \subseteq U$.

Maintenant, supposons que $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert quelconque (c.-à-d. pas nécessairement dénombrable) de X et soit

$$\mathcal{V}_0 = \{B \in \mathcal{V} \mid \exists\ U \in \mathcal{U} \text{ tel que } B \subseteq U\}.$$

Pour tout $B \in \mathcal{V}_0$, choisissons un $U_B \in \mathcal{U}$ tel que $B \subseteq U_B$ (nous pouvons faire cela d'après la définition de $\mathcal{V}_0$). Alors

$$\mathcal{U}_0 = \{U_B \mid B \in \mathcal{V}_0\}$$

est une sous-collection dénombrable de $\mathcal{U}$. Nous affirmons qu'il est aussi un recouvrement de X. Pour voir cela, supposons que $x \in X$. Alors $x \in U$ pour un certain $U \in \mathcal{U}$ (puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement de X). Comme ci-dessus, il existe $B \in \mathcal{V}$ tel que $x \in B \subseteq U$. Ainsi $x \in B \subseteq U_B$. Donc $\mathcal{U}_0$ est un recouvrement ouvert de X. Puisque X est dénombrablement compact, $\mathcal{U}_0$ a un sous-recouvrement fini de X, qui est aussi un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$. Donc X est compact. □

Remarques 4.5.10. (a) La méthode de la démonstration du théorème ci-dessus montre que tout *sous-ensemble* d'un espace métrique est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.

(b) *Attention :* Nous avons seulement démontré que 'compact' est équivalent à 'séquentiellement compact' pour les espaces métriques. Ceci n'est *pas* vrai pour les espaces topologiques arbitraires. En effet, en général, aucune de ces deux propriétés implique l'autre.

Exercices.

4.5.1. Montrez que $\mathcal{T}$, comme défini dans l'exemple 4.5.5, est une topologie.

4.5.2. Supposez que X est un espace de Hausdorff et $x \in X$. Montrez que $\{x\}$ est fermé.

4.5.3. Montrez que la topologie discrète est la seule topologie de Hausdorff sur un ensemble fini.

4.5.4. (a) Montrez que l'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles compacts d'un espace métrique est compact.

(b) Montrez que l'union de deux ensembles (et donc, un nombre fini d'ensembles) compacts d'un espace métrique est compact.

(c) L'union d'une famille arbitraire de sous-ensembles compacts d'un espace métrique est-elle compact ? Démontrez ou donnez un contre-exemple.

4.5.5 ([Coh03, Ex. 5.7(15)]). Un espace topologique X est appelé un *espace* T_1 si, pour chaque deux points distincts de X, chacun possède un voisinage qui ne contient pas l'autre.

(a) Montrez que tout espace de Hausdorff est une espace T_1.

(b) Démontrez qu'un espace topologique est un espace T_1 si et seulement si $\{x\}$ est un ensemble fermé pour tout $x \in X$.

(c) Montrez que tout espace T_1 fini a la topologie discrète.

4.6 Continuité

Vous avez vu la notion des fonctions continues dans les cours précédents. Dans cette section, nous allons généraliser cette notions aux espaces métriques généraux.

Définition 4.6.1 (Continue)**.** Une fonction f entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est appelée *continue au point* $x_0 \in X$, si

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in X,\ d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon,$$

autrement dit,

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ f\big(B_X(x_0, \delta)\big) \subseteq B_Y\big(f(x_0), \epsilon\big).$$

Nous disons que f est *continue sur* X si elle est continue à tous les points de X.

Remarque 4.6.2. Notons que si X et Y sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (avec la métrique usuelle), alors la définition ci-dessus est la définition standard de continuité que vous avez appris dans le calcul différentiel.

Rappelons-nous (définition 1.6.4) que nous avons défini 'séquentiellement continue' pour les fonctions entres des espaces métriques. Le résultat suivant montre que les deux notions sont équivalentes.

Proposition 4.6.3. *Une fonction f entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si elle est séquentiellement continue au point x_0.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Soit f une fonction qui est continue au point $x_0 \in X$, et soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de X tel que $x_n \to x_0$. Nous montrons que $f(x_n) \to f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Nous pouvons trouver, puisque f est continue au point x_0, un nombre $\delta > 0$ avec $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$. Puisque $x_n \to x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}_+$ tel que :

$$\forall\ n \geq N,\ x_n \in B(x_0, \delta),$$

ce qui implique que

$$\forall\ n \geq N,\ f(x_n) \in B(f(x), \epsilon),$$

autrement dit, $f(x_n) \to f(x)$, comme désiré.

$\Leftarrow$: Nous démontrons la proposition contraposée. Supposons que f n'est pas continue au point x_0. En utilisant la négation de la définition de la continuité, nous avons :

$$\exists\, \epsilon_0\ \forall \delta > 0\ f\big(B(x,\delta)\big) \nsubseteq B\big(f(x_0),\epsilon_0\big).$$

En particulier, c'est vrai pour tout δ sous la forme $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc nous avons

$$\exists\, \epsilon_0 > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+\ f\big(B(x_0, 1/n)\big) \nsubseteq B\big(f(x_0),\epsilon_0\big).$$

Fixons un tel $\epsilon_0 > 0$ et choisissons, pour chaque $n \in \mathbb{N}_+$, un élément $x_n \in B(x_0, 1/n)$ avec la propreté $f(x_n) \notin B(f(x_0), \epsilon_0)$.

Alors $x_n \to x_0$ dans X, mais $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ dans Y, car aucun point $f(x_n)$ est contenu dans la boule $B(f(x), \epsilon_0)$. □

Exemple 4.6.4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ x, & \text{si } x \text{ est rationnel,} \end{cases}$$

est continue au point $x = 0$ et discontinue à tous les autres points de $\mathbb{R}$.

Définition 4.6.5 (Image et image réciproque)**.** Soit $f : X \to Y$, où X et Y sont des ensembles. Si $A \subseteq X$, alors

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

et *l'image* de A sous f.

Si $B \subseteq Y$, alors

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

est *l'image réciproque* de B sous f.

Lemme 4.6.6. *Soit $f : X \to Y$ où X et Y sont des ensembles et $B \subseteq Y$. Alors*

(a) $f^{-1}(B^{\complement}) = (f^{-1}(B))^{\complement}$, et

(b) si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 4.6.1). □

Théorème 4.6.7 (Définitions équivalentes de la continuité)**.** *Pour une fonction f entre des espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) La fonction f est continue.

(b) Pour tout $x \in X$ et tout voisinage (pas nécessairement ouvert) V de $f(x)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage (pas nécessairement ouvert) de x.

(c) L'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ensemble overt $V \subseteq Y$ est ouvert dans X.

(d) L'image réciproque $f^{-1}(F)$ de tout ensemble fermé $F \subseteq Y$ est fermé dans X.

(e) *Pour tout* $A \subseteq X$, *on a* $f(\mathrm{cl}_X A) \subseteq \mathrm{cl}_Y f(A)$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Si V est un voisinage de $f(x)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(x), \epsilon) \subseteq V$. Puisque f est continue au point x, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Cela implique que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$, et donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Supposons que V est ouvert dans Y et soit $x \in f^{-1}(V)$. Alors $f(x) \in V$ et, puisque V est ouvert, $f(x)$ est un point intérieur de V. Ainsi V est un voisinage de $f(x)$ et donc, par notre supposition, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subseteq f^{-1}(V)$. Puisque $x \in f^{-1}(V)$ était arbitraire, $f^{-1}(V)$ est ouvert.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Supposons que $F \subseteq Y$ est fermé. Alors $(f^{-1}(F))^\complement = f^{-1}(F^\complement)$ est ouvert (puisque $F^\complement$ est ouvert) et donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

(d) $\Rightarrow$ (e) : Puisque l'ensemble $\mathrm{cl}_Y f(A)$ est fermé dans Y, l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y f(A))$ est fermé dans X. À l'évidence, cette image réciproque contient A. Puisque $\mathrm{cl}_X A$ est le plus petit ensemble fermé qui contient A, nous avons

$$\mathrm{cl}_X A \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}_Y f(A)).$$

Cela implique que $f(\mathrm{cl}_X A) \subseteq \mathrm{cl}_Y f(A)$.

(e) $\Rightarrow$ (a) : Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$. Soit $A = \big(f^{-1}(B(f(x), \epsilon))\big)^\complement$. Par notre supposition, nous avons $f(\mathrm{cl}_X A) \subseteq \mathrm{cl}_Y f(A)$. Puisque $f(A) \cap B(f(x), \epsilon) = \varnothing$, nous avons $\mathrm{cl}\, f(A) \cap B(f(x), \epsilon) = \varnothing$ (car $B(f(x), \epsilon)$ est ouvert et donc son complément est fermé). Par conséquent, $f(\mathrm{cl}\, A) \cap B(f(x), \epsilon) = \varnothing$. Ainsi $x \notin \mathrm{cl}\, A$. Donc, il existe un voisinage de x qui est disjoint de A. Ainsi x est un point intérieur pour $A^\complement$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Donc $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Cela implique que f est continue au point x. Puisque x était arbitraire, f est continue. □

Exemple 4.6.8. Si X est muni de la métrique discrète, alors toute fonction de X dans un autre espace métrique est continue. En effet, si $x \in X$ et $\epsilon > 0$, prennons $\delta = 1$. Alors

$$f(B(x, 1)) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq B(f(x), \epsilon).$$

Définition 4.6.9 (Fonction lipschitzienne)**.** Une fonction $f \colon X \to Y$ entre deux espaces métrique est appelée *lipschitzienne* (avec *constante de Lipschitz* L) s'il existe $L > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in X,\ d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

Exercices.

4.6.1. Démontrez le lemme 4.6.6.

4.6.2. Montrez que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

4.7 Connexité par arcs

Rappelons qu'un espace topologique (en particulier, un espace métrique, avec la topologie associée à la métrique) est *connexe* s'il ne peut pas être écrit comme une union disjointe $U \sqcup V$ de deux sous-ensembles non vides et ouverts.

Proposition 4.7.1. *Supposons que $f\colon X \to Y$ est une fonction continue et surjective entre deux espaces métriques. Si X est connexe, alors Y est connexe.*

Démonstration. Supposons que $Y = U \sqcup V$ pour des ensembles ouverts U et V, avec $U \neq \varnothing$. Nous voulons montrer que $V = \varnothing$. Soient

$$U' = f^{-1}(U), \quad V' = f^{-1}(V).$$

Puisque f est continue, U' et V' son ouverts. Ils sont aussi disjoints puisque U et V le sont. De plus, $U' \cup V' = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$.

Maintenant, puisque U est non vide, nous pouvons choisir $y \in U$. Puisque f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Alors, par définition, $x \in U'$ et donc U' est non vide. Puisque X est connexe, il faut que V' soit vide. Par conséquent,

$$V = f(V') = f(\varnothing) = \varnothing,$$

où, dans la première égalité, nous avons utilisé le fait que f est surjective et que $V' = f^{-1}(V)$. □

Remarque 4.7.2. La proposition 4.7.1 dit que l'image sous une fonction continue d'un espace métrique connexe est connexe.

Définition 4.7.3 (Connexe par arcs)**.** Un espace métrique X est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe une fonction continue $p\colon [0,1] \to X$, telle que $p(0) = x$ et $p(1) = y$. Une telle fonction p est appelée un *chemin entre x et y*.

Théorème 4.7.4. *Tout espace métrique qui est connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Supposons que X est un espace métrique qui est connexe par arcs. Soit $x_0 \in X$ un point quelconque et soit

$$\mathcal{C} = \{p([0,1]) \mid p \text{ est un chemin continu qui commence au point } x_0\}.$$

La famille $\mathcal{C}$ est constitué de sous-ensembles connexes de X d'après la proposition 4.7.1, et chacun d'eux contient le point x_0. En outre, l'union $\bigcup \mathcal{C}$ égale X puisque si $x \in X$, alors il existe un chemin continu p' de x_0 à x, et donc

$$x \in p'([0,1]) \subseteq \bigcup \mathcal{C}.$$

Ainsi, X est connexe d'après le théorème 4.4.7. □

Exemple 4.7.5. Chaque intervalle dans $\mathbb{R}$ est connexe par arcs (il est facile à construire un chemin entre deux points quelconques).

Exemple 4.7.6. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. Pour voir cela, soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Définissons un chemin par

$$p(t) = (1-t)x + ty, \quad t \in [0,1].$$

Alors $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est continu puisque toute composante est continue. Puisque $p(0) = x$ et $p(1) = y$, p est un chemin entre x et y.

Remarque 4.7.7. On peut généraliser la définition d'une fonction continue aux espaces topologiques et puis définir la connexité par arcs dans ce cadre. Il reste vrai qu'un espace connexe par arcs est connexe (donc ce n'est pas une propriété particulière des espaces métriques).

Bien que connexe par arcs implique connexe, l'implication réciproque n'est pas vrai. Avant de donner un contre-exemple, nous avons besoin de deux résultats.

Lemme 4.7.8. *Soit X un sous-ensemble (non vide) connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le graphe de f,*

$$\operatorname{gr} f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

est un sous-espace métrique connexe du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 4.7.4). □

Remarque 4.7.9. Le lemme ci-dessus peut être généralisée au cas où f est une fonction continue entre deux espaces métriques X et Y, et le graphe $\operatorname{gr} f$ est considéré comme un sous-espace métrique de $X \times Y$ munis, par exemple, de la métrique

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Lemme 4.7.10. *Supposons qu'un espace métrique X contient un sous-ensemble Z qui est connexe et dense. Alors X est connexe.*

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 4.7.5). □

Nous donnons maintenant un exemple classique d'un espace qui est connexe, mais pas connexe par arcs.

Exemple 4.7.11 (Courbe sinus fermée du topologue). Considérons les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$X_1 = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x > 0 \right\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{0\} \times [-1, 1].$$

Alors X_1 est connexe d'après le lemme 4.7.8 et il est facile à voir que X_2 est connexe (voir l'exercice 4.7.6). Maintenant, soit

$$X = X_1 \cup X_2,$$

avec la métrique induite de $\mathbb{R}^2$.

Tout point de X_2 est un point d'adhérence pour X_1 (dessinez une image, puis pour chaque point $x \in X_2$, trouvez une suite d'éléments de X_1 qui converge vers x). Donc X_1 est dense dans X. Par conséquent, d'après le lemme 4.7.10, X est connexe.

Nous affirmons que X n'est pas connexe par arcs. Soit p un chemin continu dans X avec $p(0) \in X_1$, $p(1) = (0,0) \in X_2$. Nous allons déduire une contradiction, ce qui montre qu'un tel chemin n'existe pas.

L'image réciproque $p^{-1}(X_2)$ est un sous-ensemble fermé et non vide de l'intervalle $[0,1]$ et donc $r = \inf p^{-1}(X_2) \in p^{-1}(X_2)$. Puisque $0 \notin p^{-1}(X_2)$, nous avons $r > 0$. Nous avons aussi $p(r) \in X_2$, et donc r est le plus petit élément de $[0,1]$ dont l'image sous p est contenue dans X_2.

Puisque p est continu, il existe $\delta > 0$ tel que

$$t \in [0,1],\ |t-r| < \delta \implies d(p(t),p(r)) < 1.$$

(Ici d est la distance euclidienne dans plan.)

L'intersection

$$B(p(r),1) \cap X_1$$

est l'union d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts et disjoints. Nous affirmons que $p((r-\delta,r]) \subseteq X_2$. En effet, $p((r-\delta,r])$ est connexe d'après la proposition 4.7.1. Donc, si elle contenait un point de X_1, il devrait être contenu dans l'un des intervalles ouverts mentionnés ci-dessus et donc son intersection avec X_2 serait vide. Cela contredirait le fait que $p(r) \in x_2$. Cela démontre notre affirmation. Mais maintenant $p(r-\delta/2) \in X_2$, ce qui contredit le choix de r.

Ces concepts ont une application familière.

Théorème 4.7.12 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si r est un nombre réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = r$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $f(a) < f(b)$. (Si $f(a) = f(b)$, il n'y a rien à démontrer. Si $f(a) > f(b)$, remplaçons f par $-f$.) Soit

$$f(a) < r < f(b).$$

Supposons, vers une contradiction, que $r \notin f([a,b])$. Soit

$$U = \{f(t) \mid t \in [a,b],\ f(t) < r\} = f([a,b]) \cap (-\infty, r),$$
$$V = \{f(t) \mid t \in [a,b],\ f(t) > r\} = f([a,b]) \cap (r, \infty).$$

Puisque chacun de U et V est l'intersection de $f([a,b])$ avec un ensemble ouvert, U et V sont ouverts dans $f([a,b])$ d'après le lemme 4.4.6. Nous avons aussi $U \cup V = f([a,b])$ parce que nous avons supposé que $r \notin f([a,b])$. Puisque $f(a) \in U$ et $f(b) \in V$, nous avons que U et V sont non vides. Nous avons ainsi montré que l'image de l'intervalle (connexe) $[a,b]$ sous la fonction continue f n'est pas connexe. Mais cela contredit la proposition 4.7.1. $\square$

Exercices.

4.7.1. Montrez que ℓ^∞ est connexe par arcs en utilisant un argument similaire à celui de l'exemple 4.7.6.

4.7.2. Soit X un espace métrique, et soit $\mathcal{C}$ une famille de sous-ensembles connexes par arcs de X avec les propriétés suivantes :

(a) $\bigcup \mathcal{C} = X$, et

(b) pour tous $C, D \in \mathcal{C}$, $C \cap D \neq \varnothing$.

Démontrez que X est connexe par arcs.

4.7.3. Supposons que $n \geq 2$, et soit

$$X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q} \text{ pour au moins un } i = 1, \ldots, n\}.$$

Montrez que X est connexe par arcs.

4.7.4. Démontrez le lemme 4.7.8

4.7.5. Démontrez le lemme 4.7.10.

4.7.6. Démontrez que le sous-ensemble X_2 de $\mathbb{R}^2$ défini dans l'exemple 4.7.11 est connexe.

4.8 Isométries, plongements isométriques, et complétés

Dans cette section, nous précisons l'idée que deux espaces métriques sont “le même”.

Définition 4.8.1 (Isométrie)**.** Une fonction $f \colon X \to Y$ entre deux espaces métriques est appelée un *isométrie*, ou un *isomorphisme isométrique*, si

(a) f est une bijection, et

(b) pour tous $x, y \in X$, nous avons $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Nous disons que deux espace métriques sont *isométriques*, s'il existe une isométrie de l'un à l'autre.

La relation d'être isométrique est une relation d'équivalence (exercice facile). Deux espaces isométriques auront les mêmes propriétés. Autrement dit, si X et Y sont isométriques et l'un d'entre eux est complet, alors l'autre est complet, etc.

Définition 4.8.2 (Plongement isométrique)**.** Une fonction $j \colon X \to Y$ est appelée un *plongement isométrique* si

$$d_X(x, y) = d_Y(j(x), j(y)) \quad \forall\ x, y \in X.$$

Remarque 4.8.3. Nous allons souvent utiliser la notation $j \colon X \hookrightarrow Y$ pour un plongement isométrique. Notez que tout plongement isométrique $j \colon X \hookrightarrow Y$ est injective puisque

$$j(x) = j(y) \implies d(x, y) = d(j(x), j(y)) = 0 \implies x = y.$$

Cependant, les plongements isométriques ne doivent pas être surjective. Nous pouvons penser à eux comme isométries de X à un sous-espace de Y.

Remarque 4.8.4. Il en résulte facilement de la définition que chaque plongement isométrique est continue (voir l'exercice 4.8.2).

Rappelons-nous de la section 1.4 qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

Théorème 4.8.5. *Pour un espace métrique X, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) X est complet.

(b) Chaque suite décroissante de boules fermées dont les rayons convergent vers zéro a une intersection non vide. En d'autres termes, si $x_i \in X$ et $\epsilon_i > 0$, $i \in \mathbb{N}_+$, sont telles que $\epsilon_i \to 0$ et

$$B^{\mathrm{cl}}(x_1, \epsilon_1) \supseteq B^{\mathrm{cl}}(x_2, \epsilon_2) \supseteq B^{\mathrm{cl}}(x_3, \epsilon_3) \supseteq \cdots,$$

alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} B^{\mathrm{cl}}(x_i, \epsilon_i) \neq \varnothing$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que X est complet, et soient $x_i \in X$ et $\epsilon_i > 0$ satisfaisant la condition (b). Nous soutenons que les centres $\{x_i\}$ des boules forment une suite de Cauchy. En effet, étant donné un $\epsilon > 0$, choisissons N tel que pour tout $n \geq N$ nous avons $\epsilon_n < \epsilon/2$. Puis, pour chacun de ces n, puisque la boule fermée $B^{\mathrm{cl}}(x_n, \epsilon_n)$ est contenu dans la boule fermée $B^{\mathrm{cl}}(x_n, \epsilon_N)$ et, en particulier, $x_n \in B^{\mathrm{cl}}(x_N, \epsilon_N)$, nous avons

$$d(x_N, x_n) \leq \epsilon_N < \epsilon/2.$$

Puis, pour tous $m, n \geq N$, nous avons

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Par conséquent, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Puisque X est complet, cette suite converge à un certain $x \in X$. Nous soutenons que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B^{\mathrm{cl}}(x_i, \epsilon_i)$ et donc cette intersection est non vide. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}_+$, la suite $\{x_n\}_{n=i}^{\infty}$ est contenue dans $B^{\mathrm{cl}}(x_i, \epsilon_i)$ et converge vers x. Puisque $B^{\mathrm{cl}}(x_i, \epsilon_i)$ est fermé, $x \in B^{\mathrm{cl}}(x_i, \epsilon_i)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Supposons que l'affirmation (b) est vraie et soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Pour chaque $i \in \mathbb{N}_+$, choisissons N_i tel que $N_i > N_{i-1}$ et

$$n > N_i \implies d(x_{N_i}, x_n) < 2^{-N_{i-1}}.$$

Nous soutenons que la suite de boules fermées

$$B_i = B^{\mathrm{cl}}\left(x_{N_i}, 2^{-N_{i-1}+1}\right), \; i \in \mathbb{N}_+,$$

est décroissante. En effet, pour $i \in \mathbb{N}_+$, soit $y \in B_{i+1}$. Alors

$$d(x_{N_i}, y) \leq d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) + d(x_{N_{i+1}}, y) \leq 2^{-N_{i-1}} + 2^{-N_i+1} \leq 2^{-N_{i-1}} + 2^{-N_{i-1}} = 2^{-N_{i-1}+1},$$

et donc $y \in B_i$. Ainsi $B_{i+1} \subseteq B_i$. Par notre supposition, il existe un point

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Nous soutenons que $x_i \to x$. Premièrement, notez que

$$x \in B_i \implies d(x_{N_i}, x) \leq 2^{-N_{i-1}},$$

et donc $x_{N_i} \to x$. Ainsi $\{x_{N_i}\}$ est une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge à x. Alors le résultat s'ensuit de la proposition 1.4.15. □

Exemple 4.8.6 (Propriété de l'intersection de Cantor). Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, une boule fermée est simplement un intervalle fermée. Ainsi, la condition (b) dans le théorème 4.8.5 devient :

Pour chaque suite décroissante d'intervalles fermés $[a_n, b_n]$ *dont la longueur se tend ver zéro, l'intersection* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *est non-vide.*

Cette propriété est appelé la *propriété de l'intersection de Cantor.*

Nous savons qu'il existe des espaces métriques qui ne sont pas complets. Étant donné un espace métrique qui n'est pas complet, est-il un moyen de l'intégrer dans un espace métrique complet ? La réponse est oui.

Théorème 4.8.7. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Il existe un espace métrique complet* $(\hat{X}, \hat{d})$ *qui contient* (X, d) *comme sous-espace métrique tel que l'adhérence de* X *dans* $(\hat{X}, \hat{d})$ *est* $\hat{X}$*.*

Remarque 4.8.8. Dans le théorème ci-dessus, par 'contient', nous voulons dire qu'il existe un plongement isométrique de X dans $\hat{X}$ et pas nécessairement que X lui-même est en fait un sous-espace métrique de $\hat{X}$.

Aperçu de la démonstration. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy dans X (avec ou sans limite). Définissons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{N}$ par

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(x_n, y_n) \to 0, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{N}. \tag{4.1}$$

Nous le laissons comme exercice de vérifier que cela est une relation d'équivalence (l'exercice 4.8.1).

Soit $\hat{X} = \mathcal{N}/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences. Alors, les éléments de $\mathcal{N}$ sont des classes d'équivalence $[\{x_n\}]$ des suites de Cauchy $\{x_n\}$ dans X.

Définissons une métrique sur $\hat{X}$ par

$$\hat{d}\big([\{x_n\}], [\{y_n\}]\big) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Certains travaux techniques sont nécessaires pour vérifier que la distance ci-dessus est bien définie, c.-à-d., que la limite existe, la valeur de la limite ne dépend pas d'un choix de représentants des classes d'équivalence, et que les trois axiomes d'une métrique sont satisfaits.

Nous pouvons intégrer X comme un sous-espace métrique dans $\hat{X}$. Nous faisons cela en s'identifiant chaque élément $x \in X$ à la classe d'équivalence de la suite constante correspondante,

$$[\{x, x, x, \dots\}].$$

En d'autres termes, nous associons à un $x \in X$ l'ensembles de toutes les suites dans X qui convergent vers x. Il est facile à voir que cette identification est un plongement isométrique.

Pour montrer que l'adhérence de X est $\hat{X}$, prenons un élément $z = [\{x_n\}] \in \hat{X}$ et $\epsilon > 0$. Nous allons trouver un élément $x \in X$ dans la boule $B(z, \epsilon)$. Choisissez un $N \in \mathbb{N}_+$ avec la propriété

$$\forall\ m, n > N,\ d(x_m, x_n) \leq \epsilon/2,$$

et soit $x = x_{N+1}$. Alors, nous avons

$$\hat{d}([\{x, x, x \ldots\}], z) < \epsilon,$$

comme voulu.

Finalement, montrons que $(\hat{X}, \hat{d})$ est un espace complet. Supposons que $\{z_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\hat{X}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, soit

$$z_n = [\{z_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}_+}],$$

où $\{z_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}_+}$ est une suite de Cauchy dans X (donc sa classe d'équivalence est un point dans $\hat{X}$) pour tout $n \in \mathbb{N}_+$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}_+$, trouvez un entier positif $N(k)$ tel que

$$p, q > N(k) \implies d(z_{k,p}, z_{k,q}) < 1/k.$$

Il est possible de vérifier que la suite $\{z_{k,N(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ est Cauchy. Puis, soit $z = [\{z_{k,N(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}]$. Il est possible de vérifier, en utilisant la définition, que $z_n \to z$ dans l'espace métrique $(\hat{X}, \hat{d})$. □

Définition 4.8.9 (Complété)**.** Le *complété* d'un espace métrique X est un espace métrique complet $\hat{X}$ qui contient X comme sous-espace métrique tel que l'adhérence de X dans $\hat{X}$ est $\hat{X}$.

Par exemple, l'espace $(\hat{X}, \hat{d})$ construit dans le théorème 4.8.7 est un complété de (X, d).

Exercices.

4.8.1. Montrez que (4.1) est une relation d'équivalence.

4.8.2. Montrez que tout plongement isométrique est continue.

4.8.3. Soient X et Y deux espaces métriques isométriques. Supposons que X est connexe par arcs. Démontrez que Y est aussi connexe par arcs.

4.8.4. Considérez l'ensemble $\mathbb{N}_+$ avec la métrique

$$d(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{m+n} + 1 & \text{si } m \neq n, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Démontrez que d est en effet une métrique sur $\mathbb{N}_+$.

(b) Montrez que la topologie associée à la métrique est la topologie discrète.

(c) Montrez que $(\mathbb{N}_+, d)$ est complet.

(d) Soit

$$S_n = B^{\text{cl}}(n, 1 + 1/2n) = \left\{ m \in \mathbb{N}_+ \;\middle|\; d(m, n) \leq 1 + \frac{1}{2n} \right\}.$$

Montrez que $S_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

(e) Montrez que $\{S_n\}$ est une suite décroissante de boules fermées dont l'intersection est vide. Autrement dit, montrez que

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots$$

et $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \varnothing$.

(f) Pourquoi cet exemple ne contredit pas le théorème 4.8.5 ?

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

Un espace métrique est simplement un ensemble avec une métrique (satisfaisant certains axiomes). En général, dans un espace métrique, il n'y a aucune notion d'addition ou de multiplication scalaire. Cependant, beaucoup de notre *exemples* d'espaces métriques ont telles structures, parce qu'ils sont aussi des espaces vectoriels (par exemple $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[0,1]$). Dans ce chapitre nous considérons une combinaison de ces deux sujets. Autrement dit, nous voulons considérer les objets mathématiques qui sont à la fois des espaces vectoriels et des espaces métriques, et qui a une certaine compatibilité entre les deux structures.

5.1 Définitions et exemples

Nous utiliserons la caractère gras $\mathbf{0}$ pour désigner le zéro d'un espace vectoriel arbitraire et 0 pour désigner le zéro scalaire.

Définition 5.1.1 (Espace vectoriel normé)**.** Un *espace vectoriel normé* (ou simplement un *espace normé*) est un espace vectoriel X sur un corps $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec une fonction $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+$ qui a les propriétés suivantes :

(N1) Pour $x \in X$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = \mathbf{0}$.

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in X$ et $\alpha \in F$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$ (*inégalité triangulaire*).

La fonction $\|\cdot\|$ est appelée la *norme*. Si nous voulons souligner l'espace, nous écrivons $\|\cdot\|_X$ pour la norme sur X.

Remarque 5.1.2. Notez que la définition d'une norme utilise la valeur absolue du corps. C'est pour cette raison que nous travaillons avec les nombres réels ou complexes. Cependant, il existe d'autres corps avec des valeurs absolues. L'étude des espaces normés vectoriels sur ces autres crops est appelé *l'analyse fonctionnelle non-archimédien*.

Nous pensons de

$$\|x\| = d(x, \mathbf{0})$$

comme la distance entre le vecteur x est l'origine. Alors, comme dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, il devrait être possible de définir une métrique par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

L'axiome (N1) implique que cette métrique satisfait l'axiome (M1). L'axiome (N3) implique que cette métrique satisfait l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|x - y + y - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - x\| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Finalement, l'axiome (N2) implique que la métrique est symétrique :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1| \cdot \|y - z\| \\ &= \|y - x\| \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

Bien sûr, l'axiome (N2) est plus fort que ce dont nous avons besoin pour assurer que la métrique est symétrique. Mais, il est d'accord avec notre intuition que

$$\|\alpha x\| = d(\alpha x, \mathbf{0}) = |\alpha| \cdot d(x, \mathbf{0}) = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Définition 5.1.3 (Métrique associée à une norme)**.** Soit $X = (X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La *métrique associée à* X (ou à $\|\cdot\|$) est la métrique définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Exemple 5.1.4. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^1$ possède seulement une norme (jusqu'à facteur scalaire) : $\|x\| = |x|$. C'est aussi vrai pour l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^1$.

Exemple 5.1.5 (Norme euclidienne)*.* La *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Les axiomes (N1) et (N2) sont faciles à vérifier. L'axiome (N3) résulte de l'inégalité de Cauchy–Schwarz (c'est la proposition 1.1.11). Si nous parlons de $\mathbb{R}^n$ comme un espace vectoriel normé, nous supposons que c'est avec cette norme. La métrique associée est la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

La norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$ est définie par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

Encore une fois, c'est la norme par défaut sur $\mathbb{C}^n$ et la métrique associée est la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

Exemple 5.1.6 (Norme ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)*.* La norme ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est définie par

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |x_k|.$$

C'est une exercice de montrer que cela définit une norme (exercice 5.1.3). La métrique associée est la métrique ℓ^∞.

Exemple 5.1.7 (Norme ℓ^p sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)*.* La norme ℓ^p, $p \geq 1$, sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

L'inégalité triangulaire pour cette norme est appelée *l'inégalité de Minkowski*. Nous ne le démontrons pas dans ce cours. (Vous pouvez trouver une preuve en recherchant l'inégalité de Minkowski sur Wikipedia (ou dans d'autres références) si vous le souhaitez.) La norme ℓ^2 est simplement la norme euclidienne. La métrique associée à la norme ℓ^p est la métrique ℓ^p.

Exemple 5.1.8 (Norme sur ℓ^∞)*.* Rappelons que ℓ^∞ est l'espace de toutes les suites infinies (de nombres réels ou complexes) et bornées. Nous pouvons définir une norme sur ℓ^∞ par

$$\|x\|_\infty = \sup_{k=1}^{\infty} |x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty.$$

C'est une exercice de vérifier que cela définit une norme (exercice 5.1.5). Il est facile à voir que la métrique associée est la métrique usuelle sur ℓ^∞.

Exemple 5.1.9 (Norme sur ℓ^p)*.* Rappelons que ℓ^p, $p \geq 1$, est l'espace de toutes les suites infinies (de nombre réels ou complexes) $x = (x_1, x_2, \dots)$ telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

converge. Nous pouvons définir une norme sur ℓ^p par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Encore une fois, nous ne faisons pas la démonstration de l'inégalité triangulaire (l'inégalité de Minkowski) dans ce cours (les autres axiomes d'une norme sont faciles à vérifier). Il est facile à vérifier que la métrique associée est la métrique usuelle sur ℓ^p. Cependant, nous devons vérifier que ℓ^p est en effet un espace vectoriel. Nous faisons cela pour $p = 2$ (mais il est vrai en général). Soit c_0 l'ensemble de toutes les suites à valeurs complexes qui convergent vers zéro. Il est un exercice facile à vérifier que cela est un espace vectoriel (sous l'addition de composantes et multiplication scalaire par chaque composante). Puisque les termes de toute suite convergente convergent vers zéro, ℓ^p est un sous-ensemble de c_0. Donc, nous pouvons démontrer que ℓ^p est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace de c_0. Il est facile à voir que la suite zéro est un élément de ℓ^p et que ℓ^p est fermé sous la multiplication scalaire. Supposons que $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^p$. Alors

$$(|x_k| - |y_k|)^2 \geq 0 \implies |x_k|^2 + |y_k|^2 \geq 2|x_k| \cdot |y_k|$$

et donc

$$|x_k + y_k|^2 \leq (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + |y_k|^2 + 2|x_k| \cdot |y_k| \leq 2(|x_k|^2 + |y_k|^2).$$

Par conséquent, la convergence de $\sum |x_k|^2$ et $\sum |y_k|^2$ impliquent que $\sum |x_k + y_k|^2$ converge.

Remarque 5.1.10. Comme dans la remarque 1.1.20, il faut que $p \geq 1$ puisque l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite pour $0 < p < 1$. Cependant, nous ne pouvons pas résoudre ce problème d'une manière naturelle (comme nous avons fait pour les espace métriques) puisque $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ ne définit *pas* une norme (voyez l'exercice 5.1.6).

Remarque 5.1.11. Comme nous avons fait quand nous les avons considéré comme espaces métriques, nous pouvons penser de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ comme sous-espaces de ℓ^p et ℓ^∞ en considérant les suites qui sont nulles après la n-ième composante.

Exemple 5.1.12 (Norme uniforme sur $C[a, b]$). La *norme uniforme* sur $C[a, b]$ est définie par

$$\|x\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x \in C[a, b].$$

Quand nous parlons de $C[a, b]$ comme un espace normé, c'est avec cette norme. La métrique associée est la métrique uniforme.

Exemple 5.1.13 (L'espace normé $C_p[a, b]$). Pour $p \geq 1$, nous pouvons définir une norme sur $C[a, b]$ par

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad x \in C[a, b].$$

Nous dénotons cet espace normé par $C_p[a, b]$. Puisque la métrique associée est la métrique sur $C_p[a, b]$, cela est d'accord avec notre notation précédente.

Exercices.

5.1.1 ([Coh03, Ex. 6.4(1)]). Supposons que X est un espace normé et soit d la métrique associée (voyez la définition 5.1.3). Montrez que

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{et} \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y),$$

pour tous $x, y, z \in X$ et tout scalaire α. Nous disons que la métrique est *invariante sous les translations* et *homogène*.

5.1.2 ([Coh03, Ex. 6.4(2)]). Supposons que X est un espace normé.

(a) Montrez que $\|x-y\| \geq |\,\|x\|-\|y\|\,|$ pour tous $x, y \in X$.

(b) Montrez que, si $x \neq \mathbf{0}$, alors $\|(1/\alpha)x\| = 1$ quand $\alpha = \|x\|$.

5.1.3. Démontrez que $\|x\|_\infty$, comme définie dans l'exemple 5.1.6 est une norme.

5.1.4. (a) Démontrez que

$$\|x\|_o = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n,$$

définie une norme sur $\mathbb{C}^n$.

(b) Si $\|\ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\ \|_\infty$ est la norme sur $\mathbb{C}^n$ définie dans l'exemple 5.1.6, démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

(i) $\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$,

(ii) $\|x\| \leq \|x\|_o \leq \sqrt{n}\|x\|$,

(iii) $\frac{1}{n}\|x\|_o \leq \|x\|_c \leq \|x\|_o$.

5.1.5. Avec la notation comme dans l'exemple 5.1.8, montrez que ℓ^∞ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ définie une norme sur cet espace.

5.1.6. Dans la situation de la remarque 5.1.10, quel axiome dans la définition d'une norme n'est pas satisfaite si nous définissons $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p$?

5.1.7. Pour $p = 1$ et $p = 2$, vérifiez que $\|x\|_p$, comme définie dans l'exemple 5.1.13, est une norme sur $C_p[a, b]$. *Indice* : Utilisez l'exercice 1.1.14 pour le cas $p = 2$.

5.1.8. Soit S un ensemble non vide d'un espace normé. Rappelons la définition d'un sous-ensemble borné d'un espace métrique (définition 1.5.6). Démontrez que S est borné (dans la métrique associé à X) si et seulement s'il existe un nombre positif M tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in S$.

5.1.9 ([Coh03, Ex 6.5(12)]). Si X est un espace vectoriel, une *semi-norme* sur X est une fonction $\nu\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait $\nu(\mathbf{0}) = 0$, $\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x)$, $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$, pour tous $x, y \in X$ et tout scalaire α. (Le deuxième exigence de (N1) est omis ; comparez à la définition d'une semimétrique dans l'exercice 1.1.18.)

Soit P l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions polynomiales. Démontrez que

$$\nu(p) = |p(0)| + |p'(0)| + |p''(0)|, \quad p \in P,$$

définie une semi-norme pour P, mais pas une norme. Trouvez toutes les fonctions polynomiales $p \in P$ pour lesquelles $\nu(p) = 0$ et montrez qu'elles constituent un sous-espace de P.

5.2 Convergence dans les espaces vectoriels normés

Puisque nous avons une métrique associée à toute norme, nous pouvons parler de la convergence dans les espaces normés (puisque nous avons une définition de la convergence dans un espace métrique). Formulons la définition de la convergence dans le cadre des espaces normés.

Une suite $\{x_n\}$ dans un espace normé X est *convergente* s'il existe $x \in X$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$n > N \implies \|x_n - x\| < \epsilon.$$

La suite $\{x_n\}$ est une *suite de Cauchy* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$m, n > N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Nous disons qu'un espace normé est *complet* si toute suite de Cauchy dans cet espace converge.

Définition 5.2.1 (Espace de Banach)**.** Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé qui est complet.

Exemple 5.2.2. Les espaces suivants sont des espaces de Banach :

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ avec les normes euclidiennes, ℓ^p $(p \geq 1)$, ou ℓ^∞,
- ℓ^p $(p \geq 1)$,
- ℓ^∞,
- $C[a, b]$.

En effet, nous avons défini des normes sur eux et montré dans la section 1.4 que les espaces métriques associés sont complets. Cependant $C_1[a, b]$ n'est *pas* un espace de Banach puisque nous avons montré qu'il n'est pas complet dans l'exemple 1.4.12.

Nous pouvons appliquer toutes la terminologie que nous avons apprise pour les espaces métriques aux espaces normés en considérant la métrique associée à la norme. Par exemple, nous pouvons parler d'espaces normés compacts, séquentiellement compacts, etc., et nous pouvons parler de fonctions de contraction entre les espaces normés. En outre, sur un espace normé, nous avons la topologie induite par la métrique associée à la norme.

Il faut être un peu prudent quand nous parlons des *sous-espaces* des espaces normés. Bien que tout sous-ensemble d'un espace métrique soit un espace métrique lui-même sous la métrique induite, un sous-ensemble arbitraire d'un espace normé peut ne pas être un espace vectoriel et donc pas un espace normé. Toutefois, nous pouvons encore parler de sous-ensembles compacts, sous-ensembles fermés, etc. des espaces normés (et nous ne leur demandons pas d'être sous-espaces vectoriels). Puisque la topologie sur un espace normé est la topologie associée à métrique, nous savons que tout sous-ensemble est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact. Donc, nous utilisons simplement le terme *compact*.

Définition 5.2.3 (Série)**.** Supposons que $\{x_n\}$ est une suite dans un espace normé X et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ la *somme partielle*. Alors $\{s_n\}$ est aussi une suite dans X. Nous disons que la *série* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge* si $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, et nous disons que $\lim s_n$ est la *somme* de la série. Nous disons que la série $\sum x_k$ *converge absolument* si la série $\sum \|x_k\|$ de nombres réels converge (donc ici nous parlons de la convergence dans l'espace normé $\mathbb{R}$).

Remarque 5.2.4. Notez qu'il faut être dans le cadre des espaces normé pour que les séries soient définies. Les séries ne sont pas définies dans les espaces métriques généraux car nous n'avons aucune notion d'addition.

Vous avez appris dans le calcul différentiel que toute suite absolument convergente de nombres réels est convergente. Cependant, cela n'est pas vrai pas pour tous les espaces normés. Comme nous allons le voir maintenant, il est vrai pour les nombres réels puisque $\mathbb{R}$ est un espace de Banach.

Théorème 5.2.5. *Un espace vectoriel normé X est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente dans X est convergente.*

Démonstration. Premièrement, supposons que X est un espace de Banach et que $\sum x_k$ est une série absolument convergente dans X. Donc $\sum \|x_k\|$ converge. Nous voulons montrer que $\sum x_k$ converge. Choisissons $\epsilon > 0$. Rappelons des cours précédents (voyez, par exemple, [Coh03, Th. 1.8.2]) qu'une série $\sum y_k$ de nombres réels converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$n \geq m > N \implies \left| \sum_{k=m}^{n} y_k \right| < \epsilon.$$

(Autrement dit, $\sum y_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.) Donc, en prenant $y_k = \|x_k\|$, nous pouvons trouver $N > 0$ tel que

$$n \geq m > N \implies \left\| \sum_{k=m}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| < \epsilon$$

(la première inégalité après '$\implies$' est l'inégalité triangulaire). Cela implique que

$$n \geq m > N \implies \|s_n - s_{m-1}\| < \epsilon,$$

et donc les sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ constitue une suite de Cauchy dans X. Puisque X est un espace de Banach (et donc X est complet), les sommes partielles convergent.

Maintenant supposons que toute suite absolument convergente dans X converge. Nous voulons montrer que X est complet, autrement dit, que toute suite de Cauchy converge. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Rappelons (proposition 1.4.15) que si $\{x_n\}$ contient une sous-suite convergente, alors $\{x_n\}$ converge. Notre but est de trouver une sous-suite convergente de $\{x_n\}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, choisissons $N_k > 0$ tel que

$$m, n \geq N_k \implies \|x_n - x_m\| < 1/2^k.$$

En augmentant les N_k si nécessaire, nous pouvons supposer que $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$. Puis, pour tout k nous avons

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

et donc la série $\sum \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|$ est convergente. Par conséquent, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$$

est absolument convergente et donc convergente par notre supposition. Par définition, cela implique que la suite $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ de sommes partielles converge. Autrement dit, il existe un point $s \in X$ tel que $\|s_m - s\| \to 0$. Maintenant,

$$s_m = \sum_{k=1}^{m}(x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) = x_{N_{m+1}} - x_{N_1}.$$

Soit $x = s + x_{N_1}$. Alors

$$\|x_{N_{m+1}} - x\| = \|s_m - s\| \to 0.$$

Ainsi la sous-suite $\{x_{N_k}\}$ converge (à x) comme désiré. □

Dans sa forme contraposée, le théorème 5.2.5 dit que dans un espace vectoriel normé qui n'est pas complet, il y a des séries qui sont absolument convergentes mais pas convergentes. Cela peut sembler étrange puisque le terme 'absolument convergent' semble impliquer un type spécial de convergence. Cependant, en regardant la définition précise, la convergence absolue d'une série $\sum x_k$ dit que le série (différente) $\sum \|x_k\|$ converge, mais ne dit rien directement sur la série $\sum x_k$ lui-même.

Nous n'avons pas vu de nombreux exemples d'espaces normés qui ne sont pas des espaces de Banach. Le seul exemple majeur que nous avons vu est $C_p[a,b]$. On peut trouver des exemples explicites de séries de fonctions dans $C_p[a,b]$ qui sont absolument convergentes, mais pas convergentes. Voyez, par exemple, [Coh03, §6.2]. Nous allons donner un exemple différent ici.

Lemme 5.2.6. *L'espace de toutes les fonctions polynomiales p sur $[0,1]$ est un espace normé avec la norme*

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|.$$

(Notez que c'est un sous-espace vectoriel de $C[0,1]$ avec la norme induite.)

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 5.2.2). □

Exemple 5.2.7 (Une série absolument convergent qui n'est pas convergente)*.* Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Puisque toutes les sommes partielles sont des fonctions polynomiales, c'est une série dans l'espace normé de lemme 5.2.6. Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x^n}{n!} \right\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

qui converge (dans $\mathbb{R}$) à e. Donc cette série est absolument convergente. Cependant, elle n'est pas convergente dans l'espace de fonctions polynomiales (puisqu'elle converge à la fonction exponentielle). Ainsi, l'espace de fonctions polynomiales n'est pas un espace de Banach.

Exercices.

5.2.1 ([Coh03, Ex. 6.4(3)])*.* (a) Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ des suites convergentes dans un espace normé, avec $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$. Démontrez que $x_n + y_n \to x + y$.

(b) Soit $\{x_n\}$ une suite convergente dans un espace normé, avec $\lim x_n = x$, et soit $\{\alpha_n\}$ une suite convergent de scalaires, avec $\lim \alpha_n = \alpha$. Démontrez que $\alpha_n x_n \to \alpha x$.

(c) Soit $\{x_n\}$ une suite convergente dans un espace normé, avec $\lim x_n = x$. Démontrez que $\|x_n\| \to \|x\|$. (Ainsi, $\| \ \|$ est une fonction continue sur un espace normé.)

5.2.2*.* Démontrez le lemme 5.2.6.

5.2.3 ([Coh03, Ex. 6.4(6)])*.* Soit P l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales. Montrez que

$$\|p\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|, \quad p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P,$$

définit une norme sur P. Cependant, montrez que P n'est pas un espace de Banach.

5.2.4 ([Coh03, Ex. 6.4(7)])*.* Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V. Démontrez que

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \in V,$$

définit une norme sur V. De plus, montrez que la convergence avec cette norme est équivalent à la convergence des composantes.

5.2.5 ([Coh03, Ex. 6.4(8)]). Définissons une suite $\{x_n\}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ par

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Montrez que $\{x_n\}$ est convergente (avec limite x, où $x(t) = 1$, $0 \le t \le 1$) comme une suite dans $C_1[0,1]$, mais qu'elle n'est pas convergente comme une suite dans $C[0,1]$.

5.2.6 ([Coh03, Ex. 6.4(11)]). Soit c_0 l'espace vectoriel de toutes les suites $(x_1, x_2, \dots)$ de nombres réels pour lesquelles $x_n \to 0$.

(a) Montrez que c_0 est un espace de Banach sous la norme

$$\|x\| = \max_{k \ge 1} |x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0.$$

(b) Soient $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$, $e_3 = (0,0,1,\dots)$, ... Montrez que la série $\sum_{k=1}^{\infty} e_k/k$ converge, mais qu'elle ne converge pas absolument dans c_0. Trouvez la somme de la série.

5.3 Espaces normés de dimension finie

Nous allons voir que les espaces vectoriels de dimension finie ont des bonnes propriétés du point de vue des normes. Premièrement, nous montrons que *tout* espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) peut être donné une norme.

Pour toute cette section, soit V un espace vectoriel de dimension n avec base $\{v_1, \dots, v_n\}$. La lettre α (avec ou sans indice) représentera toujours un scalaire.

Théorème 5.3.1. *La fonction $\|\cdot\|_\infty \colon V \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |\alpha_k|, \quad \textit{où} \quad x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \in V,$$

est une norme sur V.

Démonstration. Il faut vérifier les axiomes (N1)–(N3) dans la définition d'un espace normé. Puisque $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de V, $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie (puisque les α_k sont déterminés uniquement). Pour $x = \sum \alpha_k v_k$, il est claire que

$$x = \mathbf{0} \iff (\alpha_k = 0 \ \forall\ k) \iff \|x\|_\infty = 0.$$

Ainsi (N1) est satisfait.

Maintenant, pour tout scalaire α, nous avons

$$\|\alpha x\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha \alpha_k) v_k \right\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |\alpha \alpha_k| = |\alpha| \max_{1 \le k \le n} |\alpha_k| = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

Donc, (N2) est satisfait.

Finalement, il faut démontrer l'inégalité triangulaire. Soit $y = \sum \beta_k v_k$ un deuxième vecteur dans V. Pour $k = 1, \dots, n$, nous avons

$$|\alpha_k + \beta_k| \leq |\alpha_k| + |\beta_k| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} |\alpha_\ell| + \max_{1 \leq \ell \leq n} |\beta_\ell| = \|x\| + \|y\|.$$

Par conséquent,

$$\|x + y\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) v_k \right\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k + \beta_k| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Donc (N3) est satisfait. □

Théorème 5.3.2. *La convergence dans un espace vectoriel de dimension finie avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à la convergence des composantes. Autrement dit, si $\{x_m\}$ est une suite dans un espace vectoriel de dimension finie avec cette norme, et $x_m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} v_k$, alors*

$$\{x_m\}_{m=1}^\infty \text{ converge } \iff \{\alpha_{mk}\}_{m=1}^\infty \text{ converge pour tout } k = 1, 2, \dots, n.$$

(Ici la convergence de $\{\alpha_{mk}\}_{m=1}^\infty$ est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

Démonstration. Supposons que $x_m \to x$, avec $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$m > N \implies \|x_m - x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_{mk} - \alpha_k| < \epsilon.$$

Par conséquent, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$m > N \implies |\alpha_{mk} - \alpha_k| < \epsilon.$$

Ainsi, $\{\alpha_{mk}\}_{m=1}^\infty$ converge (à α_k) pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

Maintenant supposons que pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, la suite $\{\alpha_{mk}\}_{m=1}^\infty$ converge à un scalaire α_k. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et $k = 1, 2, \dots, n$, il existe N_k tel que

$$m > N_k \implies |\alpha_{mk} - \alpha_k| < \epsilon.$$

Soit $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$ et $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$. Alors

$$m > N \implies \|x_m - x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_{mk} - \alpha_k| < \epsilon.$$

Ainsi $\{x_m\}$ converge à x. □

Proposition 5.3.3. *Le sous-ensemble*

$$\{x \in V \mid \|x\|_\infty \leq 1\} = B_V^{\mathrm{cl}}(0, 1) \subseteq V$$

est compact.

Démonstration. Nous supposons que V est un espace vectoriel complexe (le cas d'un espace vectoriel réel est presque identique). Nous démontrons le résultat par induction sur la dimension n de V. Premièrement supposons que $n = 1$ et que $\{v\}$ est une base de V. Soit

$$Z = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \leq 1\} = B_{\mathbb{C}}^{\mathrm{cl}}(0,1),$$

qui est compact dans $\mathbb{C}$ (c'est une sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{C}$, qui est équivalente à $\mathbb{R}^2$ topologiquement). Définissons

$$A\colon Z \to V, \quad A\alpha = \alpha v.$$

Alors $A(Z) = B_V^{\mathrm{cl}}(0,1)$. Puisque l'image d'un ensemble compact sous une fonction continue est compact (théorème 4.4.7), il suffit de montrer que A est continue. Supposons que $\{\alpha_m\}$ est une suite dans Z qui converge à $\alpha \in Z$. Alors

$$\|A\alpha_m - A\alpha\|_\infty = \|\alpha_m v - \alpha v\|_\infty = \|(\alpha_m - \alpha)v\|_\infty = |\alpha_m - \alpha| \to 0.$$

Ainsi $A\alpha_m \to A\alpha$ et donc A est continue.

Maintenant supposons que la proposition est vraie pour $n < h-1$ pour un certain $h > 1$. Nous voulons montrer que c'est vrai pour $n = h$. Soit

$$B_i = B_V^{\mathrm{cl}}(0,1)$$

quand $n = i$, $i \in \mathbb{N}_+$. Donc notre supposition inductive est que B_n est compact pour $n < h-1$ et nous voulons montrer que B_h est compact.

Soit $\{x_m\}$ une suite dans B_h et soit

$$x_m = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{mj} v_j$$

pour $m \in \mathbb{N}_+$. La suite $\{\alpha_{m1}v_1\}_{m=1}^\infty$ est une suite dans B_1, qui est compact. Par conséquent, elle a une sous-suite convergente $\{\alpha_{m_k1}v_1\}_{k=1}^\infty$. Donc

$$\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$$

est une sous-suite de $\{x_m\}$ telle que la suite des coefficients de v_1 converge. Alors

$$\left\{\sum_{j=2}^{h} \alpha_{m_k,j} v_j\right\}_{k=1}^\infty \tag{5.1}$$

est une suite dans $\mathrm{Vect}\{v_2,\ldots,v_h\}$ (le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_2,\ldots,v_h\}$), qui est un espace vectoriel de dimension $h-1$. Puisque, pour $k \in \mathbb{N}_+$,

$$\left\|\sum_{j=2}^{h} \alpha_{m_kj} v_j\right\|_\infty = \max_{2\leq j\leq h} |\alpha_{m_kj}| \leq \max_{1\leq j\leq h} |\alpha_{m_kj}| = \|x_{m_k}\|_\infty \leq 1,$$

elle est une suite dans B_{h-1}. Puisque B_{h-1} est compact par la supposition inductive, la suite (5.1) a une sous-suite convergent. D'après le théorème 5.3.2, les composantes de cette sous-suite convergent. Par conséquent, les composantes de la sous-suite correspondante de $\{x_m\}$ convergent aussi (puisque nous avons déjà choisi une sous-suite dans laquelle la première composante converge) et donc la suite $\{x_m\}$ converge. $\square$

Lemme 5.3.4. *Toute norme est une fonction continue.*

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 5.2.1(c)). □

Lemme 5.3.5. *Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors l'ensemble*

$$S = \{x \in V \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

est compact.

Démonstration. Cette démonstration est une exercice (exercice 5.3.1). □

Nous avons vu que nous pouvons définir une norme sur tout espace vectoriel de dimension finie. Maintenant nous montrons que, dans ce cadre, toutes les normes sont équivalentes. Premièrement, il faut définir l'équivalence des normes.

Définition 5.3.6 (Normes équivalentes)**.** Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel X sont *équivalentes* s'il existe des entiers positifs a et b tels que

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$

Remarque 5.3.7. Il résulte de la définition 5.3.6 que

$$\frac{1}{b}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{a}\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X.$$

Donc, la définition est symétrique.

Lemme 5.3.8. *L'équivalence des normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les normes sur un espace vectoriel fixe X.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme est un exercice (exercice 5.3.2). □

Lemme 5.3.9. *Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes équivalentes sur X, alors une suite $\{x_n\}$ dans X converge par rapport à $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle converge par rapport à $\|\cdot\|_2$. De même, $\{x_n\}$ est Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle est Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_2$.*

Démonstration. Si $\{x_n\}$ converge par rapport à $\|\cdot\|_1$, alors il existe $x \in X$ tel que $\|x_n - x\|_1 \to 0$. Puis

$$\|x_n - x\|_2 \leq b\|x_n - x\|_1 \to 0$$

(où b est un entier positif fixe) et donc $\{x_n\}$ converge par rapport à $\|\cdot\|_2$. L'implication réciproque résulte de la symétrie de la définition des normes équivalentes.

La deuxième partie du lemme, au sujet des suites de Cauchy, est une exercice (exercice 5.3.3). □

Lemme 5.3.10. *Supposons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes équivalentes sur X et que Y est un sous-ensemble de X. Alors*

(a) Y est fermé par rapport à $\|\cdot\|_1$ si et seulement s'il est fermé par rapport à $\|\cdot\|_2$, et

(b) Y est borné par rapport à $\|\cdot\|_1$ si et seulement s'il est borné par rapport à $\|\cdot\|_2$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est une exercice (exercice 5.3.4). □

Théorème 5.3.11 (Équivalences des normes sur des espace vectoriels de dimension finie)**.** *Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons que V est un espace vectoriel de dimension finie. D'après le lemme 5.3.8, il suffit de montrer que toute norme sur V est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur V. Puisque l'ensemble

$$S = \{x \in V \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

est compact d'après le lemme 5.3.5, nous pouvons conclure du lemme 5.3.4 et le corollaire 3.3.2 que $\|\cdot\|$ atteint son maximum et minimum sur S. Autrement dit, il existe des points $x_M, x_m \in S$ tels que

$$\|x_M\| = \max_{x \in S} \|x\|, \quad \|x_m\| = \min_{x \in S} \|x\|.$$

Donc

$$\|x_m\| \leq \|x\| \leq \|x_M\| \quad \forall\, x \in S.$$

Puisque $\|x_m\|_\infty = 1$, nous avons $x_m \neq 0$, et donc $\|x_m\| > 0$.

Maintenant, pour un point quelconque $x \in V$, $x \neq \mathbf{0}$, nous avons

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\|_\infty = \frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\|_\infty = 1 \implies \frac{1}{\|x\|_\infty} x \in S.$$

Ainsi, pour tout $x \neq \mathbf{0}$, nous avons

$$\|x_m\| \leq \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| \leq \|x_M\|,$$

et donc

$$\|x_m\| \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x_M\| \cdot \|x\|_\infty.$$

Puisque ces inégalités sont aussi manifestement vraies quand $x = \mathbf{0}$, nous voyons que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. □

Remarque 5.3.12. Puisque nous avons montré (théorème 5.3.2) que la convergence par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalent à la convergence des composantes, nous voyons du théorème 5.3.11 que la convergence par rapport à *toute* norme sur un espace vectoriel de dimension finie est équivalente à la convergence des composantes. Notez, cependant, que ceci n'est *pas* vrai pour des espaces normés de dimension infinie. Voyez, par exemple, l'exercice 5.2.5.

Théorème 5.3.13. *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. D'après le lemme 5.3.9 et le théorème 5.3.11, il suffit de montrer que l'espace normé $(V, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans cet espace et écrivons $x_m = \sum_{k=1}^n \alpha_{mk} v_k$ pour $m \in \mathbb{N}_+$. Fixons $\epsilon > 0$. Alors nous pouvons choisir $N > 0$ tel que

$$j, m > N \implies \|x_m - x_j\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |\alpha_{mk} - \alpha_{jk}| < \epsilon.$$

Alors pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, nous avons

$$j, m > N \implies |\alpha_{mk} - \alpha_{jk}| < \epsilon,$$

et donc $\{\alpha_{mk}\}_{m=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, chacune de ces suites converge. Ainsi, d'après le théorème 5.3.2, la suite $\{x_m\}$ converge. □

Nous savons qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné (théorème 3.1.9). Maintenant nous pouvons généraliser ce résultat aux espaces normés de dimension finie quelconque.

Théorème 5.3.14. *Un sous-ensemble d'un espace normé de dimension finie est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Démonstration. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie. Nous savons déjà que tout sous-ensemble compact est fermé et borné (les théorèmes 3.1.5 et 3.1.7). Il reste à montrer que tout sous-ensemble fermé et borné est aussi compact. Premièrement, nous faisons cela pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit S un sous-ensemble fermé et borné de V. Nous pouvons modifier facilement la preuve de la proposition 5.3.3 pour montrer que

$$B^{(L)} = B_V^{\mathrm{cl}}(0, L) = \{x \in V \mid \|x\|_\infty \le L\}$$

est compact pour tout entier positif L. Puisque S est borné, il existe L tel que $S \subseteq B^{(L)}$. Puisque S est fermé, il est compact d'après le lemme 3.1.11.

Maintenant soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur V et soit S un sous-ensemble fermé et borné de V par rapport à cette norme. D'après le lemme 5.3.10, S est aussi fermé et borné par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ et ainsi, par ce que nous avons montré ci-dessus, il est compact par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Maintenant soit $\{x_m\}$ une suite dans S. Alors il existe une sous-suite $\{x_{m_k}\}$ qui converge par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. D'après le lemme 5.3.9, cette sous-suite converge aussi par rapport à $\|\cdot\|$. Par conséquent, S est compact par rapport à $\|\cdot\|$. □

Exercices.

5.3.1. Démontrez le lemme 5.3.5.

5.3.2. Démontrez le lemme 5.3.8.

5.3.3. Complétez la démonstration de lemme 5.3.9.

5.3.4. Démontrez le lemme 5.3.10.

5.3.5. Démontrez que, pour toute norme sur un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des suites des coefficients (par rapport à une certaine base).

5.4 Théorie de l'approximation

D'après le théorème 3.3.3, si S est un sous-ensemble compact et non vide d'un espace normé X, alors il y a une meilleure approximation de tout point de X par un point de S. Plus précisément, pour chaque $x \in X$, il existe un $p \in S$ tel que $\|p - x\|$ est un minimum.

Théorème 5.4.1. *Supposons que S est un sous-espace de dimension finie d'un espace normé X et que $x \in X$. Alors il existe un point $p \in S$ tel que $\|x - p\|$ est un minimum.*

Démonstration. Fixons $p_0 \in S$ et soit

$$Y = \{y \in S \mid \|y - x\| \leq \|p_0 - x\|\}.$$

Tout point $p \in S$ tel que $\|x - p\|$ est un minimum est manifestement un point de Y. Ainsi il suffit de montrer, d'après le théorème 3.3.3, que Y est compact. Puisque la dimension de S est finie, tout sous-ensemble fermé et borné de S est compact. Donc nous montrons que Y est un sous-ensemble fermé et borné de S.

Pour tout $y \in Y$, nous avons

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq \|p_0 - x\| + \|x\|.$$

Donc Y est borné. Maintenant supposons que $\{y_n\}$ est une suite dans Y qui converge à un point $y \in S$. Pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver une valeur de n assez grande telle que

$$\|y - x\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - x\| < \epsilon + \|p_0 - x\|.$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, cela implique que

$$\|y - x\| \leq \|p_0 - x\|.$$

Par conséquent, $y \in Y$ et donc Y fermé. □

Définition 5.4.2. Soit $\mathcal{P}_n([a, b])$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ de degré au plus n.

Puisque $\mathcal{P}_n([a, b])$ a une base $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, il est un sous-ensemble de $C[a, b]$ de dimension finie. D'après le théorème 5.4.1, pour toute fonction $f \in C[a, b]$, il existe une fonction polynomiale $p \in \mathcal{P}_n([a, b])$ qui est la meilleure approximation à f, autrement dit, telle que

$$\|p - f\| = \max_{a \leq t \leq b} |p(t) - f(t)|$$

est un minimum.

Remarque 5.4.3. (a) Nous allons voir, dans le théorème d'approximation de Weierstrass (théorème 5.5.5) que si nous permettons les fonctions polynomiales de degré arbitrairement grande, nous pouvons trouver une approximation de tout élément de $C[a,b]$ qui est aussi bonne que nous désirons.

(b) Les théorèmes 3.3.3 et 5.4.1 garantissent l'existence d'une meilleure approximation, main ne nous disent pas si une telle meilleure approximation est unique, et ne nous disent pas comment trouver cette meilleure approximation.

Nous voyons maintenant une condition additionnelle qui nous garantit que les meilleures approximations sont uniques.

Définition 5.4.4 (Strictement convexe)**.** Un espace normé X est *strictement convexe* si, pour tous $x, y \in X$, $x, y \neq \mathbf{0}$,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = \beta y \text{ pour un certain } \beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0.$$

Remarque 5.4.5. Dans tout espace normé X, l'inégalité triangulaire garantit que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall\ x, y \in X.$$

Si $x = \beta y$ pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, alors

$$\|x+y\| = \|(\beta+1)y\| = (\beta+1)\|y\| = \beta\|y\| + \|y\| = \|\beta y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Cependant, il est possible, dans certains espaces normés, qu'il existe $x, y \in X$ tel que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ mais pour lesquels $x \neq \beta y$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Par exemple, c'est possible dans $C[a,b]$.

Théorème 5.4.6. *Supposons que X est un espace normé strictement convexe et que S est un sous-espace de X de dimension finie. Alors tout point de X possède une meilleure approximation unique par un point de S.*

Démonstration. D'après le théorème 5.4.1, une meilleure approximation existe. Il reste à montrer qu'elle est unique. Soit $x \in X$. Si $x \in S$, alors manifestement x est sa propre meilleure approximation unique (puisque $\|x-p\| > 0$ pour tout $p \neq x$). Ainsi nous supposons que $x \notin S$. D'après le théorème 5.4.1, nous pouvons trouver un point $p \in S$ tel que $\|x-p\|$ est un minimum. Supposons que $p' \in S$ est une autre meilleure approximation. Soit

$$d = \|x-p\| = \|x-p'\|.$$

Puisque S est un sous-espace, nous avons $\frac{1}{2}(p+p) \in S$. Donc

$$d \leq \left\| x - \frac{1}{2}(p+p') \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x-p) + \frac{1}{2}(x-p') \right\| \leq \frac{1}{2}\|x-p\| + \frac{1}{2}\|x-p'\| = d.$$

Par conséquent,

$$\left\| x - \frac{1}{2}(p+p') \right\| = d = \frac{1}{2}\|x-p\| + \frac{1}{2}\|x-p'\| = \left\| \frac{1}{2}(x-p) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(x-p') \right\|.$$

Puisque X est strictement convexe, cela implique qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$x - p = \beta(x - p') \implies x(1-\beta) = p - \beta p'.$$

Si $\beta \neq 1$, alors

$$x = \frac{1}{1-\beta}p - \frac{\beta}{1-\beta}p'.$$

Mais cela contredit le fait que $p, p' \in S$ et $x \notin S$ (puisque S est un sous-espace). Ainsi, $\beta = 1$. Cela implique que

$$x - p = x - p' \implies p = p'. \qquad \square$$

Exemple 5.4.7 ($C[a,b]$ n'est pas strictement convexe). L'espace $C[a,b]$ n'est pas strictement convexe. Par exemple, si $b > |a|$, soit

$$f(t) = b^2, \quad g(t) = tb, \quad a \leq t \leq b.$$

Alors $\|f\| = \|g\| = b^2$, mais $\|f+g\| = 2b^2 = \|f\| + \|g\|$. Cependant, il est claire que $f \neq \beta g$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que l'espace normé $C_2[a,b]$ est strictement convexe (voyez l'exercice 5.4.1). Par conséquent, pour tous $f \in C_2[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}_+$, il existe une fonction polynomiale unique p de degré au plus n telle que

$$\|f - p\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - p(x))^2 \, dx}$$

est un minimum. Cette fonction p est appelée la *meilleure approximation polynomiale des moindres carrés* de f.

Exercices.

5.4.1 ([Coh03, Ex. 6.10(5)]). Montrez que l'espace normé $C_2[a,b]$ est strictement convexe. *Indice* : Utilisez l'exercice 1.1.14.

5.5 L'approximation de Weierstrass

Notre objectif est de rapprocher toute fonction continue sur un intervalle fermé, par exemple $[0,1]$, par une fonction polynomiale. Nous verrons qu'il est possible de le faire avec une précision arbitraire (dans la norme uniforme).

Premièrement, nous généralisons la définition de la continuité uniforme.

Définition 5.5.1 (Uniformément continue)**.** Supposons que X et Y sont des espaces normés et que S est un sous-ensemble de X. Nous disons qu'une fonction $A\colon S \to Y$ est *uniformément continue* sur S si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$x', x'' \in S,\ \|x' - x''\| < \delta \implies \|Ax' - Ax''\| < \epsilon.$$

Il est claire de la définition ϵ-δ de la continuité (définition 4.6.1) que si une fonction est uniformément continue sur son domaine, alors elle est continue.

Théorème 5.5.2. *Une fonction continue sur un ensemble compact est uniformément continue. Autrement dit, si $A\colon X \to Y$ est une fonction entre des espaces normés qui est continue sur un sous-ensemble non vide et compact S de X, alors A est uniformément continue sur S.*

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in S$, nous pouvons choisir un δ_x tel que

$$x' \in S,\ \|x - x'\| < \delta_x \implies \|Ax - Ax'\| < \epsilon/2.$$

Soit

$$B_x = B_S(x, \delta_x/2) = \{x' \in S \mid \|x - x'\| < \delta_x/2\}.$$

Puisque $x \in B_x$, nous avons que $\{B_x\}_{x\in S}$ est un recouvrement ouvert de S. Puisque S est compact, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ tel que $\bigcup_{i=1}^n B_{x_i} = S$. Soit $\delta = \min_{i=1}^n \delta_{x_i}/2$ et supposons que y, y' sont deux points quelconques de S tels que $\|y - y'\| < \delta$. Alors il faut que $y \in B_{x_j}$ pour un certain $j = 1, \dots, n$. Ainsi, nous avons aussi

$$\|x_j - y'\| \le \|x_j - y\| + \|y - y'\| < \frac{\delta_{x_j}}{2} + \delta \le \delta_{x_j}.$$

Par conséquent,

$$\|y - x_j\| < \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j} \quad \text{et} \quad \|x_j - y'\| < \delta_{x_j}.$$

Donc

$$\|Ay - Ay'\| \le \|Ay - Ax_j\| + \|Ax_j - Ay'\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Remarque 5.5.3. Voyez [Coh03, Th. 6.8.2] pour un autre démonstration qui utilise la compacité séquentielle.

Rappelons que la formule du binôme de Newton dit que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Lemme 5.5.4. *Nous avons*

(a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$

(b) $\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$

Démonstration. Nous obtenons la première équation en prenant $a = 1 - x$ et $b = x$ dans la formule du binôme. Nous pouvons obtenir la deuxième équation en manipulant la première. Nous ne discutons pas les détailles. Voyez, par exemple, [Coh03, p. 201]. □

Théorème 5.5.5 (Théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *L'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $C[a,b]$. Autrement dit, pour tout $f \in C[a,b]$ et $\epsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p - f\| < \epsilon$.*

Démonstration. Pour simplifier la notation, nous considérons seulement le cas où $a = 0$, $b = 1$. Le cas géneral est analogue. Fixons $f \in C[0,1]$ et $\epsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}_+$, définissons

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Ces fonctions sont appelées les *polynômes de Bernstein* pour f. D'après le lemme 5.5.4(a), nous avons

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, qui est compact, f est uniformément continue sur cet intervalle. Par conséquent, il existe un δ tel que

$$x', x'' \in [0,1],\ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \epsilon/2.$$

Fixons un point $x_0 \in [0,1]$ et séparons l'ensemble $S = \{0, 1, \dots, n\}$ en deux ensembles disjoints :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ k \;\middle|\; k \in S,\ \left|\frac{k}{n} - x_0\right| < \delta \right\}, \\ S_2 &= \left\{ k \;\middle|\; k \in S,\ \left|\frac{k}{n} - x_0\right| \ge \delta \right\}. \end{aligned}$$

Alors $|f(x_0) - f(k/n)| < \epsilon/2$ quand $k \in S_1$ et

$$\left| f(x_0) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le |f(x_0)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le 2 \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| = 2\|f\|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |f(x_0) - p_n(x_0)| &\le \sum_{k \in S_1} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in S_2} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \in S_1} \binom{n}{k} x_0^k (1-x_0)^{n-k} + 2\|f\| \sum_{k \in S_2} \binom{n}{k} x_0^k (1-x_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.5.4(a), nous avons

$$\sum_{k\in S_1} \binom{n}{k} x_0^k(1-x_0)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k(1-x_0)^{n-k} = 1,$$

et d'après le lemme 5.5.4(b), nous avons

$$\begin{aligned} nx_0(1-x_0) &= \sum_{k=0}^{n}(k-nx_0)^2 \binom{n}{k} x_0^k(1-x_0)^{n-k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2 x_0^k(1-x_0)^{n-k} \\ &\geq n^2 \sum_{k\in S_2} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2 x_0^k(1-x_0)^{n-k} \\ &\geq n^2\delta^2 \sum_{k\in S_2} \binom{n}{k} x_0^k(1-x_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$x_0(1-x_0) = \frac{1}{4} - \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

et donc

$$\sum_{k\in S_2} \binom{n}{k} x_0^k(1-x_0)^{n-k} \leq \frac{x_0(1-x_0)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Par conséquent,

$$|f(x_0)-p_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2n\delta^2} \quad \forall\ x_0 \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Maintenant prenons $n > \|f\|/\epsilon\delta^2$, pour que $\|f\|/n\delta^2 < \epsilon$. Alors

$$|f(x_0)-p_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Puisque nous avons cette inégalité pour tout $x_0 \in [0,1]$, nous avons

$$\|f-p_n\| = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)-p_n(x)| < \epsilon.$$ □

Remarque 5.5.6. Notez que la démonstration du théorème 5.5.5 nous dit comment trouver le polynôme qui est l'approximation de la fonction donnée—ce n'est pas une démonstration d'existence abstraite.

Théorème 5.5.7 ($C[a,b]$ est séparable)**.** *L'espace métrique $C[a,b]$ est séparable. Plus précisément, l'ensemble des fonctions polynomiales avec des coefficients rationnels est dense dans $C[a,b]$. Autrement dit, pour tous $f \in C[a,b]$ et $\epsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p avec des coefficients rationnels telle que $\|p-f\| < \epsilon$.*

Démonstration. Encore une fois, nous considérons le cas $a = 0$, $b = 1$. Supposons que $f \in C[0,1]$ et $\epsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (théorème 5.5.5), nous pouvons trouver une fonction polynomiale q telle que $\|q - f\| < \epsilon/2$. Le seul problème est que cette fonction polynomiale peut avoir des coefficients irrationnels. Donc, nous trouver une approximation de cette fonction polynomiale qui a seulement des coefficients rationnels. Supposons que

$$q(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k, \quad 0 \le x \le 1.$$

Puisque les nombres rationnels sont denses dans les nombres réels, pour tout $k = 0, \dots, r$, nous pouvons choisir un nombre rationnel b_k tel que

$$|b_k - a_k| \le \frac{\epsilon}{2(r+1)}.$$

Définissons

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r} b_k x_k, \quad 0 \le x \le 1.$$

Alors pour tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$|p(x) - q(x)| = \left| \sum_{k=0}^{r} (b_k - a_k) x^k \right| \le \sum_{k=0}^{r} |b_k - a_k| \cdot |x|^k \le \sum_{k=0}^{r} \frac{\epsilon}{2(r+1)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi

$$\|p - f\| \le \|p - q\| + \|q - f\| < \epsilon. \qquad \square$$

Exercices.

5.5.1. Supposons que X et Y sont des espaces normés et que $A \colon X \to Y$ est une fonction qui est uniformément continue sur X. Montrez que si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X, alors $\{Ax_n\}$ est une suite de Cauchy dans Y.

5.5.2. Démontrez que les fonctions contractantes sont uniformément continues.

5.5.3 ([Coh03, Ex. 6.10(14)]). Généralisez le théorème d'approximation de Weierstrass pour montrer que, pour tous $\epsilon > 0$ et fonction $f \in C[a,b]$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p - f\| < \epsilon$. *Indice* : Définissez une fonction g par $g(y) = f(a + (b-a)y)$. Alors $g \in C[0,1]$, donc il existe une fonction polynomiale q telle que $\|q - g\| < \epsilon$. Soit $p(x) = q\big((x-a)/(b-a)\big)$. Alors p est une fonction polynomiale avec la propriété désirée.

5.5.4 ([Coh03, Ex. 6.10(14)]). Soit $f \in C^{(1)}[a,b]$, que est l'espace des fonctions dérivables définies sur $[a,b]$, avec la norme uniforme. Montrez que, si $\epsilon > 0$ et p est une fonction polynomiale telle que $\|p - f'\| < \epsilon$, alors $\|q - f\| < \epsilon(b-a)$, où q est la fonction polynomiale définie par $q(x) = \int_a^x p(t)\, dt + f(a)$.

Chapitre 6

Fonctions entre des espaces normés

Nous avons discuté les espaces vectoriels normés dans le chapitre 5. Maintenant nous discutons les fonctions entres tels espaces.

6.1 Opérateurs bornés

Puisque les espaces normés ont la structure d'un espace vectoriel (à la différence des espaces métriques en général), nous pouvons parler des fonction *linéaires* entres des espaces normés. Nous allons voir que ces fonctions ont plusieurs bonnes propriétés.

Théorème 6.1.1. *Pour une fonction linéaire $A\colon X \to Y$ entre deux espaces normés, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) A est continue.

(b) La restriction de A à $B = B_X^{\mathrm{cl}}(0,1)$ est continue.

(c) A est continue à 0.

(d) La restriction de A à B est bornée.

(e) Il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\|Ax\|_Y \leq K \cdot \|x\|_X, \quad \forall\, x \in X.$$

(f) A est une fonction lipschitzienne.

(g) A est uniformément continue.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Cela résulte du fait que la restrcition d'une fonction continue à un sous-espace métrique est continue.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Cela résulte du fait que 0 est un point intérieur de B.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Si A est continue à 0, alors nous pouvons choisir $\delta > 0$ tel que

$$\|x - \mathbf{0}\| = \|x\| < \delta \implies \|Ax - A\mathbf{0}\| = \|Ax\| < 1.$$

Soit $K = 2/\delta$. Alors pour tout $x \in B$, nous avons

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\frac{2}{\delta}\frac{\delta x}{2}\right)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\| A\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\cdot 1 = K,$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $\|\delta x/2\| = (\delta/2)\|x\| \le \delta/2 < \delta$. Donc A est borné sur B.

(d) $\Rightarrow$ (e) : Supposons que la restriction de A à B est bornée. Alors il existe un $K \ge 0$ tel que, pour tout $x \in B$, nous avons $\|Ax\| \le K$. Si $x = \mathbf{0}$, alors $Ax = \mathbf{0}$ et la conclusion s'ensuit. Donc, supposons que $x \ne \mathbf{0}$. Alors $\|x\| \ne 0$. Puisque $\|\,x/\|x\|\,\| = 1$, nous avons $x/\|x\| \in B$ et donc

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\|\cdot\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \|x\|\cdot K,$$

comme désiré.

(e) $\Rightarrow$ (f) : Fixons $K \ge 0$ comme dans la condition (e). Alors pour tous $x, y \in X$, nous avons

$$d_Y(Ax, Ay) = \|Ax - Ay\|_Y = \|A(x-y)\|_Y \le K\cdot\|x-y\|_X = K\cdot d_X(x,y).$$

Ainsi A est une fonction lipschitzienne avec constante de Lipschitz K.

(f) $\Rightarrow$ (g) : Toute fonction lipschitzienne entre deux espaces métriques est uniformément continue (exercice 4.6.2).

(g) $\Rightarrow$ (a) : Tout fonction uniformément continue est continue. $\square$

Définition 6.1.2 (Opérateur borné)**.** Une fonction linéaire entre deux espaces normés est appelée *opérateur borné* si elle satisfait les conditions équivalentes du théorème 6.1.1.

Remarque 6.1.3. Certain références (e.g. [Coh03]) utilisent le terme *opérateur* pour un opérateur borné.

Définition 6.1.4 (Norme d'opérateur)**.** Supposons que $A\colon X \to Y$ est un opérateur borné entre deux espaces normés. Alors

$$\|A\| := \inf\{K \ge 0 \mid \|Ax\| \le K\|x\|,\ x \in X\}$$

est appelé la *norme d'opérateur* de A.

Exemple 6.1.5. Supposons que X est un espace normé et que $A\colon X \to X$ est la fonction définie par $Ax = \beta x$, $x \in X$, pour un scalaire fixe β. Il est évident que cette fonction est linéaire, et elle est bornée puisque

$$\|Ax\| = \|\beta x\| = |\beta|\,\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

Si X n'est pas l'espace vectoriel zéro, alors $\|A\| = |\beta|$.

Exemple 6.1.6. Soit $X = C[0,1]$ (avec la norme uniforme) et $Y = \mathbb{R}$ (avec la norme usuelle). Définissons la *distribution de Dirac* $\delta\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$, par

$$\delta(g) = g(0), \quad \forall\, g \in C[0,1].$$

Il est facile à vérifier que δ est linéaire. Nous soutenons qu'elle est borné, et que sa norme égale 1. En effet,

$$|\delta(g)| = |g(0)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)| = \|g\| = 1 \cdot \|g\|.$$

Donc δ est bornée et $\|\delta\| \leq 1$. En prenant la fonction $g(x) \equiv 1$, nous avons

$$\|\delta(g)\| = |g(0)| = 1 = 1 \cdot \|g\|,$$

et donc $\|\delta\| \geq 1$. Ainsi $\|\delta\| = 1$.

Exemple 6.1.7. Encore une fois, soit $X = C[0,1]$ et $Y = \mathbb{R}$. Définissons $T\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$Tg = \int_0^1 g(x)\,dx - g(0).$$

Il est facile à vérifier que T est linéaire. Maintenant,

$$\begin{aligned} |Tg| = \left| \int_0^1 g(x)\,dx - g(0) \right| &\leq \left| \int_0^1 g(x)\,dx \right| + |g(0)| \\ &\leq \int_0^1 |g(x)|\,dx + |g(0)| \leq 2 \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)| = 2\|g\|. \end{aligned}$$

Ainsi T est borné et $\|T\| \leq 2$. Nous soutenons que $\|T\| = 2$. Pour tout $0 < \epsilon < 1$, définissons $g_\epsilon \in C[0,1]$ par

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} -1 + 2x/\epsilon, & 0 \leq x \leq \epsilon, \\ 1, & \epsilon < x \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\|g\| = 1$ et

$$|T(g)| = \left| \int_0^1 g(x)\,dx - g(0) \right| = 2 - \epsilon = (2 - \epsilon)\|g\|.$$

Puisque nous pouvons prendre ϵ aussi proche à zero que nous le voulons, cela montre que $\|T\| \geq 2$. Ainsi $\|T\| = 2$.

Théorème 6.1.8. *Soit $A\colon X \to Y$ un opérateur borné entre des espaces normés. Alors*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \in X,\ x \neq \mathbf{0} \right\} && (= b) \\ &= \sup\{\|Ax\| \mid x \in X,\ \|x\| = 1\} && (= c) \\ &= \sup\{\|Ax\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\} && (= d). \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que $\|A\| \leq b \leq c \leq d \leq \|A\|$. Pour $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, nous avons

$$b \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leq b\|x\|,$$

ce qui est aussi vrai quand $x = \mathbf{0}$. Ainsi $\|A\| \leq b$.

Maintenant, pour $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, nous avons

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq c,$$

puisque $x/\|x\|$ a norme 1. Par conséquent, $b \leq c$.

Puisque

$$\{x \mid x \in X,\ \|x\| = 1\} \subseteq \{x \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\},$$

nous avons $c \leq d$.

Finalement, si $\|x\| \leq 1$, alors $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| \leq \|A\|$, et donc $d \leq \|A\|$. □

Théorème 6.1.9. *Supposons que X et Y sont des espaces normés. L'ensemble $B(X, Y)$ de tous les opérateurs bornés de X dans Y est un espace vectoriel sous l'addition et multiplication scalaire usuelles pour les fonctions linéaires.*

Démonstration. Nous savons de l'algèbre linéaire que l'ensemble de tous les fonctions linéaires entre deux espaces vectoriels fixes est lui-même un espace vectoriel. Il reste à montrer qu'une combinaison linéaire des opérateurs *bornés* est borné. Supposons que $A, B \colon X \to Y$ sont des opérateurs bornés et que α, β sont des scalaires. Alors, pour tout $x \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(\alpha A + \beta B)x\| &= \|\alpha Ax + \beta Bx\| \\
&\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\| \\
&= |\alpha|\,\|Ax\| + |\beta|\,\|Bx\| \\
&\leq |\alpha|\,\|A\|\,\|x\| + |\beta|\,\|B\|\,\|x\| \\
&= (|\alpha|\,\|A\| + |\beta|\,\|B\|)\|x\|
\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha A + \beta B$ est borné, comme requis. □

Théorème 6.1.10. *Supposons que X et Y sont des espaces normés. Alors $B(X, Y)$, avec la norme d'opérateur, est un espace normé.*

Démonstration. Si A est la fonction zéro, alors $\|Ax\| = 0 = 0 \cdot \|x\|$ pour tout $x \in X$ et donc $\|A\| = 0$. D'autre part, si $\|A\| = 0$, alors $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| = 0$ pour tout $x \in X$. Donc $Ax = \mathbf{0}$ pour tout $x \in X$ (par la propriété (N1) de la norme sur Y). Ainsi A est la fonction zéro. Donc la norme d'opérateur satisfait (N1).

Maintenant supposons que $A \in B(X, Y)$ et que α est un scalaire. Pour démontrer que (N2) est satisfait, il faut montrer que $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$. Pour tout $x \in X$,

$$\|(\alpha A)x\| = \|\alpha Ax\| = |\alpha|\,\|Ax\| \leq (|\alpha|\,\|A\|)\,\|x\|.$$

Ainsi $\|\alpha A\| \leq |\alpha|\,\|A\|$. Il reste à montrer que $\|\alpha A\| \geq |\alpha|\,\|A\|$. Nous avons

$$\|Ax\| = \|(\alpha^{-1}\alpha)Ax\| = \|\alpha^{-1}(\alpha A)x\| = |\alpha|^{-1}\|(\alpha A)x\| \leq |\alpha|^{-1}\|\alpha A\|\,\|x\|.$$

Par conséquent
$$\|A\| \leq |\alpha|^{-1}\|\alpha A\| \implies \|\alpha A\| \geq |\alpha|\,\|A\|,$$
comme désiré.

Finalement, il faut montrer que (N3) est satisfait. Supposons que $A_1, A_2 \in B(X,Y)$. Alors, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|(A_1+A_2)x\| &= \|A_1x + A_2x\| \leq \|A_1x\| + \|A_2x\| \\ &\leq \|A_1\|\,\|x\| + \|A_2\|\,\|x\| = (\|A_1\| + \|A_2\|)\,\|x\|.\end{aligned}$$

Ainsi $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$, et donc (N3) est satisfait. □

Théorème 6.1.11. *Si Y est un espace de Banach, alors $B(X,Y)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Supposons que Y est un espace de Banach. Il faut montrer que $B(X,Y)$ est complet. Soit $\{A_n\}$ une suite de Cauchy dans $B(X,Y)$. Choisissons $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, et $\epsilon > 0$. Puisque $\{A_n\}$ est une suite de Cauchy, nous pouvons choisir $N > 0$ tel que

$$n, m > N \implies \|A_n - A_m\| < \epsilon/\|x\|.$$

Alors
$$n, m > N \implies \|A_nx - A_mx\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\,\|x\| < \epsilon.$$
Par conséquent $\{A_nx\}$ est une suite de Cauchy dans Y (c'est aussi vrai pour $x = \mathbf{0}$ puisque, dans ce cas, $A_nx = \mathbf{0}$ pour tout n). Puisque Y est complet, cette suite converge à un certain $y \in Y$. Définissons $Ax = y$. Cela définit une fonction $A\colon X \to Y$. Nous voulons montrer que $A \in B(X,Y)$ et que $A_n \to A$.

Pour $x_1, x_2 \in X$ et des scalaires α_1, α_2, nous avons

$$\begin{aligned}A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha_1A_nx_1 + \alpha_2A_nx_2) \\ &= \alpha_1\left(\lim_{n\to\infty} A_nx_1\right) + \alpha_2\left(\lim_{n\to\infty} A_nx_2\right) \\ &= \alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2.\end{aligned}$$

Ainsi A est linéaire.

Supposons que $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$. Puisque $A_nx \to Ax$, nous pouvons choisir $N_1 > 0$ tel que

$$n > N_1 \implies \|A_nx - Ax\| < \|x\|.$$

Alors, pour $n > N_1$, nous avons

$$\|Ax\| \leq \|Ax - A_nx\| + \|A_nx\| < \|x\| + \|A_n\|\,\|x\| = (1 + \|A_n\|)\|x\|.$$

Puisque $\{A_n\}$ est une suite de Cauchy, nous pouvons choisir $N_2 > 0$ tel que

$$n, m > N_2 \implies \|A_n - A_m\| < 1,$$

et donc

$$n > N_2 \implies \|A_n - A_{N_2+1}\| < 1 \implies \|A_n\| \leq \|A_{N_2+1}\| + 1.$$

Ainsi, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, nous avons

$$n > N \implies \|Ax\| < (1 + \|A_n\|)\|x\| < (2 + \|A_{N_2+1}\|)\|x\|.$$

Puisque N_2 ne dépend pas de n ou x, nous voyons que A est borné. Donc $A \in B(X, Y)$.

Il reste à montrer que $A_n \to A$ (dans la norme d'opérateur). Fixons $\epsilon > 0$. Puisque $\{A_n\}$ est une suite de Cauchy, nous pouvons choisir $N_1 > 0$ tel que

$$m, n \geq N_1 \implies \|A_n - A_m\| < \epsilon/2.$$

Maintenant, fixons $x \in X$. Puisque $A_n x \to Ax$ par la définition de A, nous pouvons choisir $N_2 > 0$ tel que

$$n \geq N_2 \implies \|Ax - A_n x\| < \frac{\epsilon\|x\|}{2}.$$

Soit $k = \max\{N_1, N_2\}$. Puis pour tout $n \geq N_1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(A - A_n)x\| &= \|Ax - A_k x\| \\
&\leq \|Ax - A_k x\| + \|A_k x - A_n x\| \\
&\leq \|Ax - A_k x\| + \|(A_k - A_n)x\| \\
&\leq \frac{\epsilon\|x\|}{2} + \|A_k - A_n\|\,\|x\| \\
&\leq \frac{\epsilon\|x\|}{2} + \frac{\epsilon}{2}\,\|x\| \\
&= \epsilon\|x\|.
\end{aligned}$$

Notez que la choix de N_1 ne dépendait pas de x (seulement de ϵ). Ainsi

$$n \geq N_1 \implies \|A - A_n\| < \epsilon,$$

et donc $A_n \to A$ dans la norme d'opérateur. □

Remarque 6.1.12. Voyez [Coh03, Th. 7.2.5] pour une autre démonstration qui utilise le fait qu'un espace normé est un espace de Banach si et seulement si toute suite absolument convergente est convergente.

Théorème 6.1.13. *Toute fonction linéaire d'un espace normé de dimension finie dans un autre espace normé est borné.*

Démonstration. Nous démontrons le théorème dans le cas ou le corps est le corps de nombres réels (la preuve dans le cas des espaces vectoriels complexes est analogue). Pour tout espace vectoriel de dimension finie, nous pouvons l'identifier avec $\mathbb{R}^n$ en choisissant une base. Donc, il suffit de montrer le résultat pour $\mathbb{R}^n$. Nous montrons premièrement le théorème pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base standard de $\mathbb{R}^n$ et soit $A \colon \mathbb{R}^n \to X$ une fonction linéaire, où X est un espace normé quelconque. Puis, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left\| A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|Ae_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\max_{j=1}^n |x_i| \right) \|Ae_i\| \\
&= \|x\|_\infty \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\| \right).
\end{aligned}$$

Ainsi A est borné et

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|.$$

Maintenant, soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur $\mathbb{R}^n$. Puisque nous savons que toutes les normes sur une espace vectoriel fixe de dimension finie sont équivalentes, il existe $a, b \geq 0$ tels que

$$a\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\|Ax\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\| \right) \|x\|_\infty \leq b \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\| \right) \|x\|,$$

et donc A est borné. □

Remarque 6.1.14. Notez que la norme d'un opérateur borné dépend des normes sur le domaine et codomaine. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, la norme de A quand $\mathbb{R}^n$ est donné la norme $\|\cdot\|_\infty$ peut être différente que la norme de A quand $\mathbb{R}^n$ est donné une autre norme.

Exercices.

6.1.1 ([Coh03, Ex 7.5(2)]). Fixez nombres réels $a < b$ et soit k une fonction de deux variables, qui est continue dans le carré $[a, b] \times [a, b]$. Fixez un scalaire λ, et définissez une fonction $A\colon C[a, b] \to C[a, b]$ par $Ax = y$, où

$$y(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)x(t)\, dt, \quad x \in C[a,b],\ a \leq s \leq t.$$

Ici nous considérons $C[a, b]$ comme un espace normé, avec la norme uniforme.

(a) Montrez que $\|A\| \leq |\lambda| M(b-a)$, où M est la valeur maximum de $|k(s,t)|$ pour $a \leq s \leq b$ et $a \leq t \leq b$.

(b) Montrez que la fonction A est encore bornée quand elle est considérée comme une fonction de l'espace normé $C_1[a,b]$ dans lui-même, et de l'espace normé $C_2[a,b]$ dans lui-même. Autrement dit, considérez l'effet des autres normes. Dans chaque cas, montrez aussi qu'on peut obtenir la même borne sur $\|A\|$ comme ci-dessus.

6.1.2 ([Coh03, Ex 7.5(3)]). Soit g une fonction continue fixe sur $[a,b]$ et soit A la fonction de $C[a,b]$ dans lui-même définie par $Ax = y$, où $y(t) = g(t)x(t)$, $a \leq t \leq b$. Montrez que A est une opérateur linéaire borné. Montrez que A est aussi un opérateur borné quand elle est considérée comme fonction de $C_1[a,b]$ dans lui-même.

6.1.3 ([Coh03, Ex 7.5(9)]). Supposons que X et Y sont des espaces vectoriels normés.

(a) Montrez que
$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad x \in X,\ y \in Y,$$
définit une norme sur $X \times Y$.

(b) Montrez que
$$\|(x,y)\|' = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x \in X,\ y \in Y,$$
définit une norme sur $X \times Y$.

(c) Montrez que les deux normes sur $X \times Y$ définies ci-dessus sont équivalentes.

6.1.4 ([Coh03, Ex 7.5(10)]). Si X et Y sont des espaces de Banach, montrez que $X \times Y$ est aussi un espace de Banach, sous l'une ou l'autre des normes sur $X \times Y$ définies dans l'exercice 6.1.3.

6.1.5. Supposons que $A\colon X \to X$ est un opérateur borné sur un espace normé X. Montrez que toute valeur propre λ de A satisfait $|\lambda| \leq \|A\|$. Plus précisément, montrez que s'il existe $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, et un scalaire λ tel que $Ax = \lambda x$, alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

6.1.6 ([Coh03, Ex. 7.5(14)]). Soit A une fonction linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y. Démontrez que A est borné si et seulement si l'image sous A de tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble borné de Y.

6.2 Fonctionnelles linéaires et le théorème de Hahn–Banach

Définition 6.2.1. Soit K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit X un espace normé sur K. Une *fonctionnelle* sur X est une fonction $f\colon X \to K$.

Puisque nous avons la norme standard sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les fonctionnelles sont des fonctions entre des espaces normés. Donc nous pouvons parler des fonctionnelles linéaires, bornées, continues, etc. Si une fonctionnelle est borné, elle a une norme (la norme d'opérateur).

Rappelons que $B(X,K)$ est l'ensemble de tous les opérateurs bornés de X dans K. Puisque K est un espace normé de dimension finie, il est un espace de Banach (théorème 5.3.13). Ainsi, selon le théorème 6.1.11, $B(X,K)$ est un espace de Banach.

Définition 6.2.2 (Espace dual)**.** Si X est un espace normé sur le corps K ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $B(X,K)$ est appelé *l'espace dual* de X est il est dénoté par X^*.

Notre discussion ci-dessus implique que l'espace dual d'un espace normé est toujours un espace de Banach. Ce résultat est très utile, même si les applications dépassent le cadre de ce cours.

Exemples 6.2.3. (a) Fixons $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$. Puis la fonction

$$f\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C},\quad f(x)=\sum_{k=1}^n a_kx_k,\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n,$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{C}^n$.

(b) La fonction

$$f\colon C[a,b]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\int_a^b x(t)\,dt,\quad x\in C[a,b],$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C[a,b]$.

(c) Pour un c fixe avec $a\le c\le b$,

$$\delta_c(x)=x(c),\quad x\in C[a,b],$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C[a,b]$. Cette fonctionnelle est appelée la *distribution de Dirac*.

(d) Si X est un espace normé, alors

$$f\colon X\to\mathbb{R},\quad f(x)=\|x\|,\quad x\in X,$$

est une fonction sur X (mais elle n'est pas linéaire en général).

Proposition 6.2.4. *Une fonctionnelle linéaire sur un espace normé X est continue sur X si et seulement si* $\ker f$ *est fermé (dans X).*

Démonstration. Supposons que f est continue sur X. Supposons que $\{x_n\}$ une suite dans $\ker f$ qui converge dans X à un point x. Nous voulons montrer que $x\in\ker f$. Puisque f est continue, nous avons

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

Ainsi $x\in\ker f$, comme désiré.

Nous ne faisons pas la preuve de l'implication réciproque en classe, mais vous pouvez le trouver, par exemple, dans [Coh03, Th. 7.3.2]. □

Supposons que X est un objet mathématique (par exemple, un ensemble, un espace métrique, un espace vectoriel, une variété, etc.). Qu'est-ce que cela veut dire que X admet "assez" de fonctions d'un type donné (par exemple, fonctions continues, opérateurs bornés, etc.) ? Une interprétation est que cette classe de fonctions *sépare les points* de X dans le sens que pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe une fonction sur X du type donné tel que $f(x) \neq f(y)$.

Voici un exemple de cette idée.

Proposition 6.2.5. *Les fonctions lipschitziennes (à valeurs réels) séparent les points de tout espace métrique.*

Démonstration. Soit X un espace métrique, et soit $x, y \in X$, $x \neq y$. Définissons

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(z) = d(x, z).$$

Puis f est une fonction lipschitzienne avec constante de Lipschitz 1, puisque pour tous $z_1, z_2 \in X$, nous avons

$$d(f(z_1), f(z_2)) = |f(z_1) - f(z_2)| = |d(x, z_1) - d(x, z_2)| \leq d(z_1, z_2)$$

(l'inégalité résulte de l'inégalité triangulaire). Puisque

$$f(x) = d(x, x) = 0 \neq d(x, y) = f(y),$$

nous avons fini. □

Corollaire 6.2.6. *Les fonctions continues séparent les points de tout espace métrique.*

Maintenant nous considérons la question : Les fonctionnelles linéaires bornées séparent-elles les points de tout espace normé ?

Exemple 6.2.7. Les fonctionnelles linéaires bornées séparent les éléments de l'espace normé $C[0, 1]$. Pour voir cela, supposons que $f, g \in C[0, 1]$, $f \neq g$. Alors $f(x) \neq g(x)$ pour un certain $x \in [0, 1]$. Alors

$$\delta_x(f) = f(x) \neq g(x) = \delta_x(g).$$

Exemple 6.2.8. Sur un espace normé de dimension finie, toute fonctionnelle linéaire est bornée. Il est facile à voir que les fonctionnelles linéaires séparent les points de *tout* espace normé (voir l'exercice 6.2.4). Ainsi, les fonctionnelles linéaires bornées séparent les points de tout espace normé de dimension finie.

Définition 6.2.9 (Sous-espace normé)**.** Un *sous-espace normé* d'un espace normé X est un sous-espace vectoriel de X qui est muni de la restrction de la norme de X.

Théorème 6.2.10 (Théorème de Hahn–Banach)**.** *Supposons que Y est un sous-espace normé d'un espace normé X et que ϕ est une fonctionnelle linéaire bornée sur Y. Alors nous pouvons s'étendre ϕ à une fonctionnelle linéaire bornée $\tilde{\phi}$ sur X (c.-à-d. $\tilde{\phi}|_Y = \phi$) avec la propriété que $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$.*

Avant de démontrer ce théorème, voyons comment il répond à notre question.

Corollaire 6.2.11. *Les fonctionnelles linéaires bornées séparent les points de tout espace normé.*

Démonstration. Supposons que X est un espace normé sur K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et que $x, y \in X$, $x \neq y$. Soit $z = x - y$ et définissons

$$Y = \{tz \mid t \in K\}$$

d'être l'espace linéaire de dimension un engendré par z. Puis définissons une fonctionnelle linéaire ϕ sur Y par

$$\phi(tz) = t\|z\|.$$

Puisque

$$|\phi(tz)| = |t|\,\|z\| = 1 \cdot \|tz\|,$$

ϕ est borné avec la norme $\|\phi\| = 1$. Selon le théorème de Hahn–Banach (théorème 6.2.10), nous pouvons s'étendre ϕ à une fonctionnelle linéaire $\tilde{\phi}$ de norme 1 sur tout X. Maintenant,

$$\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y) = \tilde{\phi}(z) = \phi(z) = \|z\| \neq 0.$$

Par conséquent, $\tilde{\phi}(x) \neq \tilde{\phi}(y)$. □

Nous allons seulement donner une preuve du théorème de Hahn–Banach (théorème 6.2.10) dans le cas important où Y est de codimension un, c'est-à-dire $\dim X/Y = 1$. On peut réduire le cas général à ce cas particulier au moyen d'une récursion appropriée. Intuitivement, nous répétons l'extension en ajoutant de plus en plus de vecteurs à Y, un à la fois, jusqu'à ce que nous arrivions à X.

Lemme 6.2.12. *Soit Y un espace linéaire de codimension un d'un espace normé X, et soit $\phi \colon Y \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire bornée. Alors il existe une fonctionnelle linéaire bornée $\tilde{\phi} \colon X \to \mathbb{R}$ avec $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$, qui s'étend ϕ (dans le sens où $\tilde{\phi}|_F = \phi$).*

Démonstration. Choisissions $x \in X \setminus Y$. Alors $X = Y \oplus \mathbb{R}x$ et donc tout élément $w \in X$ peut être écrit uniquement sous la forme

$$w = y + tx,$$

pour un certain $y \in Y$ et un certain $t \in \mathbb{R}$.

Définissons des fonctions (non linéaires) $\psi_1, \psi_2 \colon Y \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_1(y) = \|\phi\|\,\|x + y\| - \phi(y), \quad y \in Y,$$
$$\psi_2(y) = -\|\phi\|\,\|x + y\| - \phi(y), \quad y \in Y.$$

Pour tous $y, z \in Y$, nous avons

$$\begin{aligned}\psi_1(y) - \psi_2(z) &= \|\phi\|\,(\|x + y\| + \|-x - z\|) - \phi(y - z) \\ &\geq \|\phi\|\,\|x + y - x - z\| - \phi(y - z) \qquad \text{(by (N3))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|\phi\| \, \|y - z\| - \phi(y - z) \\ &\geq 0 \quad \text{(par la définition de la norme d'opérateur).} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf_{y \in Y} \psi_1(y) \geq \sup_{z \in Y} \psi_2(z).$$

Ainsi nous pouvons choisir $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\psi_1(y) \geq a \geq \psi_2(y) \quad \forall\, y \in Y.$$

Puis nous définissions $\tilde{\phi}$ par

$$\tilde{\phi}(y + tx) = \tilde{\phi}(y) + t\tilde{\phi}(x) = \phi(y) + ta.$$

Cette fonction est évidement linéaire et elle s'étend ϕ. Il reste à trouver sa norme.

Par la définition de la norme d'opérateur, il existe $y \in Y$ tel que

$$|\phi(y)| = \|\phi\| \, \|y\|.$$

Ainsi

$$\|\tilde{\phi}(y)\| = \|\phi(y)\| = \|\phi\| \, \|y\|,$$

et donc $\|\tilde{\phi}\| \geq \|\phi\|$. Donc il suffit de montrer que $\|\tilde{\phi}\| \leq \|\phi\|$. Autrement dit, nous voulons montrer que

$$|\tilde{\phi}(w)| \leq \|\phi\| \, \|w\|, \quad \forall\, w \in X.$$

Soit $w \in X$ un élément quelconque et écrivons $w = y + tx$ pour des éléments uniques $y \in Y$ et $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$, alors

$$\tilde{\phi}(w) = \phi(y) \leq \|\phi\| \, \|y\| = \|\phi\| \, \|w\|,$$

et nous avons fini. Donc supposons que $t \neq 0$. Notez que la choix de a implique que pour tout $y \in Y$, nous avons

$$-\|\phi\| \, \|x + y\| \leq a + \phi(y) \leq \|\phi\| \, \|x + y\| \implies |a + \phi(y)| \leq \|\phi\| \, \|x + y\|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}(w)\| &= |t| \cdot \left| \phi\left(\frac{y}{t}\right) + a \right| \\ &\leq |t| \cdot \|\phi\| \cdot \left\| \frac{y}{t} + x \right\| \\ &= \|\phi\| \cdot \|y + tx\| \\ &= \|\phi\| \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

□

Exercices.

6.2.1. Montrez que, dans l'exemple 6.2.3, les fonctionnelles définies dans (a), (b), et (c) sont linéaires, tandis que la fonctionnelle définie dans (d) n'est pas linéaire.

6.2.2 ([Coh03, Ex. 7.5(7)]). Fixez $j \in \mathbb{N}_+$ et définissez $f\colon \ell^2 \to \mathbb{C}$ par $f(x) = x_j$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$. Montrez que f est une fonctionnelle linéaire et que $\|f\| = 1$.

6.2.3. Montrez que sur tout espace métrique, les fonctions lipschitziennes séparent les points des espaces fermés.

6.2.4. Montrez que les fonctionnelles linéaires séparent les points de tout espace normé.

Chapitre 7

Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

Dans ce dernier chapitre, nous examinons les espaces préhilbertiens et les espaces de Hilbert. Vous avez vu les espaces préhilbertiens dans les cours précédents. Cependant, nous en discuterons et plus de détaille ici, et les lierons aux autres concepts que nous avons vus dans ce cours.

7.1 Espaces préhilbertiens

Dans cette section, nous supposons que tous les espaces vectoriels sont des espaces vectoriels complexes. Le sujet de cette section (les espaces préhilbertiens) est un sujet que vous avez vu dans les cours précédents de l'algèbre linéaire. Donc, nous allons omettre quelques détailles des faits de base que vous avez déjà vu.

Définition 7.1.1 (Espace préhilbertien)**.** Un *espace préhilbertien* (complexe) (anglais : inner product space) est un espace vectoriel X avec une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{C}$ avec les propriétés suivantes :

(EP1) $\langle x, x \rangle > 0$ pour tout $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$,

(EP2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in X$ (ici $\bar{z}$ est le conjugué de $z \in \mathbb{C}$),

(EP3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in X$ et tout scalaire α,

(EP4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pour tous $x, y, z \in X$.

La fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est appelée le *produit scalaire*.

Remarques 7.1.2. (a) En anglais, nous utilisons les termes *scalar product* et *inner product*. Le produit scalaire est parfois dénoté par $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, $(\cdot, \cdot)$, ou $(\cdot \mid \cdot)$.

(b) La propriété (EP2) implique qui, pour tout $x \in X$, $\overline{\langle x, x \rangle} = \langle x, x \rangle$ et donc $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.

(c) Nous allons utiliser le terme espace préhilbertien pour indiquer un espace préhilbertien *complexe*, comme ci-dessus. Cependant, on peut aussi considérer les espaces préhilbertiens *réel*, ou on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ dans la définition. Dans ce cas, (EP2) devient $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Lemme 7.1.3. *Si* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est un espace préhilbertien, alors*

(a) $\langle x, \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}, y\rangle = 0$ *pour tous* $x, y \in X$, *et*

(b) nous avons

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{\beta}_j \langle x_k, y_j\rangle.$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est une exercice (exercice 7.1.1). □

Exemple 7.1.4. Nous pouvons définir un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

(voyez l'exercice 7.1.4.) Nous dénotons cet espace préhilbertien encore par $\mathbb{C}^n$.

Exemple 7.1.5. Nous pouvons définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Avec ce produit scalaire, $\mathbb{R}^n$ est un espace préhilbertien, et nous le dénotons encore par $\mathbb{R}^n$.

Exemple 7.1.6. Rappelons que ℓ^2 est l'espace vectoriel de toutes les suites complexes $(x_1, x_2, \dots)$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converge. Sur ℓ^2 nous définissions un produit scalaire par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2.$$

Bien sûr, il faut vérifier que ce produit scalaire est bien définie (c.-à-d. que la série dans la définition converge). D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, si $m \le n$, nous avons

$$\left|\sum_{k=m}^{n} x_k \bar{y}_k\right| \le \sum_{k=m}^{n} |x_k \bar{y}_k| = \sum_{k=m}^{n} |x_k|\,|y_k| \le \sqrt{\sum_{k=m}^{n} |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=m}^{n} |y_k|^2}.$$

Puisque $x, y \in \ell^2$, les sommes des séries à la droite sont petites quand m et n sont grands. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons choisir $N > 0$ tel que

$$m, n > N \implies \left|\sum_{k=m}^{n} x_k \bar{y}_k\right| < \epsilon.$$

Par conséquent, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ converge. (Voyez [Coh03, Th. 1.8.2] si vous oubliez cette propriété des séries.)

Définition 7.1.7 (Norme sur un espace préhilbertien)**.** Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors, pour $x \in X$, définissons

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X.$$

Nous allons voir que la fonction définie ci-dessus est une norme. Mais premièrement, il faut généraliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Théorème 7.1.8 (Inégalité de Cauchy–Schwarz générale)**.** *Pour deux points x, y dans un espace préhilbertien,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Démonstration. Si $y = \mathbf{0}$, alors l'inégalité est évidente. Ainsi nous supposons que $y \neq \mathbf{0}$, donc $\|y\| > 0$. Pour tout scalaire α, nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + \alpha y\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \alpha \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\alpha} \big(\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2 \big). \end{aligned}$$

Maintenant soit $\alpha = -\langle x, y \rangle / \|y\|^2$. Alors $\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2 = 0$ et donc

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

Cela implique l'inégalité. □

Corollaire 7.1.9. *Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors $(X, \| \cdot \|)$ est un espace normé, où $\| \cdot \|$ est la fonction définie dans la définition 7.1.7.*

Démonstration. La vérification de (N1) et (N2) sont des exercices (exercice 7.1.6). Pour voir (N3), notons que pour $x, y \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= \left(\|x\| + \|y\| \right)^2. \end{aligned}$$

En prenant les racines carrées, nous obtenons (N3). □

Ainsi, tout espace préhilbertien est aussi un espace normé, donc il est un espace métrique, donc il est un espace topologique.

Exemple 7.1.10. Pour des fonctions continues $x, y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, définissons

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,dt.$$

On peut vérifier que cela définit un produit scalaire sur $C_2[a,b]$ (voyez l'exercice 7.1.8). Nous dénotons cet espace préhilbertien enore par $C_2[a,b]$. Notons que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_a^b x(t)^2\,dt}$$

est la norme sur $C_2[a,b]$.

Nous avons vu des exemples

- des espaces topologiques qui ne sont pas des espaces métriques (c.-à-d. les espace topologiques qui ne sont pas métrisables), et
- des espaces métriques qui ne sont pas des espaces normés (par exemple, tout espace métrique qui ne peut pas être transformé en espace vectoriel).

Est-ce qu'il y a des espaces normés qui ne peuvent pas être transformé en espaces préhilbertiens (tel que nous retrouvons la norme avec la définition 7.1.7). Oui ! En fait, $C[a,b]$ (avec la norme uniforme) est un tel espace. Pour démontrer cela, nous allons démontrer une propriété des espaces préhilbertiens qui n'est pas satisfaite par $C[a,b]$.

Proposition 7.1.11 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points x, y dans un espace préhilbertien,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Démonstration. Cette démonstration, qui est par calcul direct, est une exercice (ou voyez [Coh03, Th. 8.1.3]). □

Proposition 7.1.12. *Il n'y a aucun produit scalaire sur $C[a,b]$ qui induit la norme uniforme.*

Démonstration. Nous allons démontrer le cas spécial $a = 0$, $b = 1$. Il suffit de trouver deux points qui ne satisfont pas la règle de parallélogramme. Définissons

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Puis

$$(x+y)(t) = 1, \quad (x-y)(t) = 2t - 1.$$

Nous vérifions facilement que

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |t| = 1, \quad \|y\| = \|x+y\| = \|x-y\| = 1.$$

Par conséquent,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \ne 4 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□

Définition 7.1.13 (Orthogonal)**.** Deux vecteurs x, y dans un espace préhilbertien X sont appelés *orthogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$, et nous écrivons $x \perp y$. Un sous-ensemble S de X est appelé un *ensemble orthogonal* dans X si $x \perp y$ pour tous $x, y \in S$, $x \neq y$. Si, en addition, $\|x\| = 1$ pour tout $x \in S$, alors S est appelé un *ensemble orthonormal*.

Remarque 7.1.14. Certain références exigent que les éléments d'un ensemble orthonormal sont non zéros.

Proposition 7.1.15. *Un ensemble orthonogonal de vecteurs non zéros dans un espace préhilbertien est linéairement indépendant.*

Démonstration. Vous avez vu la démonstration de ce théorème dans les cours précédents. □

Proposition 7.1.16. *Tous sous-espace vectoriel de dimension dénombrable d'un espace préhilbertien possède une base orthogonale.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème utilise *l'algorithme de Gram–Schmidt*, que vous avez vu dans les cours précédents. □

Exercices.

7.1.1. Démontrez le lemme 7.1.3.

7.1.2. Supposons que X est un espace préhilbertien. Montrez que, pour tous $x, y, z \in X$, nous avons

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

7.1.3. Supposons que X est un espace préhilbertien et que $x, y \in X$ avec $x \perp y$ et $\|x\| = \|y\|$. Montrez que $x + y$ est orthogonal à $x - y$.

7.1.4. Vérifiez que $\langle\cdot,\cdot\rangle$, comme défini dans l'exemple 7.1.4 est un produit scalaire.

7.1.5. Vérifiez que pour les produits scalaires définis sur $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ et ℓ^2 dans cette section, la définition 7.1.7 retrouve les normes que nous avons défini sur ces espaces dans la section 5.1.

7.1.6. Complétez la démonstration du corollaire 7.1.9 en vérifiant (N1) et (N2).

7.1.7 ([Coh03, Ex. 8.6(3)]). Pour des vecteurs dans un espace préhilbertien complexe, démontrez que

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

et

$$\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = \frac{i}{2}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right),$$

et donc déduisez *l'identité de polarisation*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|x + i^k y\|^2.$$

(Cela montre qu'on peut retrouver le produit scalaire de la norme.)

7.1.8. Montrez que $\|x\|$, comme définie dans l'exemple 7.1.10 est un produit scalaire sur $C_2[a, b]$.

7.1.9. Montrez que tout espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'un produit scalaire.

7.1.10 ([Coh03, Ex. 8.6(5)]). Supposons que $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites de Cauchy dans un espace préhilbertien. Démontrez que $\{\langle x_n, y_n\rangle\}$ est une suite convergent dans $\mathbb{C}$.

7.1.11 ([Coh03, Ex. 8.6(6)]). Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un sous-ensemble d'un espace préhilbertien X et supposons que $x \perp y_k$ pour un certain $x \in X$ et tout $k = 1, \ldots, n$. Démontrez que $x \perp \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$ pour tous scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7.1.12 ([Coh03, Ex. 8.6(7)]). Supposons que $\{x_n\}$ est une suite convergent dans un espace préhilbertien X, avec $\lim x_n = x$. S'il existe $y \in X$ tel que $\langle x_n, y\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, démontrez que $\langle x, y\rangle = 0$.

7.1.13 ([Coh03, Ex. 8.6(8)]). Supposons que $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites dans un espace préhilbertien tels que $x_n \to \mathbf{0}$ et $\{y_n\}$ est bornée. Montrez que $\langle x_n, y_n\rangle \to 0$.

7.1.14. Soit X un espace préhilbertien et supposons que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble orthogonal dans X. Démontrez que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Cela est un généralisation du *théorème de Pythagore*.

7.2 Espaces de Hilbert

Puisque tout espace préhilbertien est un espace normé, nous pouvons demander si un espace préhilbertien est complet ou non. Rappelons qu'un espace normé complet est appelé un espace de Banach.

Définition 7.2.1 (Espace de Hilbert)**.** Un espace préhilbertien complet est appelé un *espace de Hilbert*.

Remarque 7.2.2. Selon la définition, tout espace de Hilbert est un espace de Banach. Cependant, l'implication réciproque n'est pas vraie. Par exemple, nous avons vu que $C[a, b]$ est un espace de Banach, mais qu'il n'est pas un espace préhilbertien (puisque il ne satisfait pas la règle de parallélogramme) et donc il n'est pas un espace de Hilbert.

Exemple 7.2.3. D'après le théorème 5.3.13, tout espace préhilbertien de dimension finie est complet. Par conséquent, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Exemple 7.2.4. L'espace métrique $C_2[a,b]$ n'est pas complet (voyez la remarque 1.4.14). Ainsi il ne peut pas être complet comme espace préhilbertien. Donc $C_2[a,b]$ n'est pas un espace de Hilbert. Cependant, si on remplace l'intégrale de Riemann par l'intégrale de Lebesgue, il y a un espace relié que *est* complet.

Exemple 7.2.5. L'espace ℓ^2 est complet, comme nous avons noté dans la remarque 1.4.8. Ainsi ℓ^2 est un espace de Banach.

Théorème 7.2.6. *Si f est une fonctionnelle linéaire bornée sur un espace de Hilbert X, alors il existe un élément unique $v \in X$ tel que $f(x) = \langle x, v\rangle$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Nous n'allons pas démontrer ce théorème en classe. Voyez, par exemple, [Coh03, Th. 9.2.1]. □

Remarque 7.2.7. Rappelons que l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires bornées sur un espace normé X est appelé l'espace dual de X, et il est dénoté X^*. Le théorème ci-dessus dit que

$$f \in X^* \iff \exists\, v \in X \text{ tel que } f(x) = \langle x, v\rangle\ \forall\, x \in X.$$

Il est facile à montrer que le vecteur v est unique.

Maintenant nous pouvons développer la notion de *l'adjoint* d'un opérateur borné. Supposons que X, Y sont des espaces de Hilbert at que $A \in B(X,Y)$ (c.-à-d. $A\colon X \to Y$ est un opérateur linéaire borné). Nous définissons une fonction $Y \to X$ comme suit. Choisissons un élément quelconque $y \in Y$ et définissons une fonctionnelle f sur X par

$$f(x) = \langle Ax, y\rangle_Y, \quad x \in X. \tag{7.1}$$

On peut vérifier que f est linéaire (voyez l'exercice 7.2.1). Nous avons

$$|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle_Y| \le \|Ax\|\,\|y\| \le (\|A\|\,\|y\|)\|x\|$$

où dans la première inégalité, nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Ainsi f est bornée. Par conséquent, d'après le théorème 7.2.6, il existe un élément unique $v \in X$ tel que

$$f(x) = \langle x, v\rangle_X \quad \forall\, x \in X.$$

Ainsi

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, v\rangle_X \quad \forall x \in X.$$

Notons que v dépend de la choix de y. Nous définissons une fonction $A^*\colon Y \to X$ qui envoie v à y. Autrement dit, A^* est définie par

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \quad \forall\, x \in X,\ y \in Y.$$

Maintenant nous montrons que A^* est linéaire et bornée.

Soient $y_1, y_2 \in Y$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle_X &= \langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle_Y \\ &= \bar{\alpha}_1 \langle Ax, y_1\rangle_Y + \bar{\alpha}_2 \langle Ax, y_2\rangle_Y \\ &= \bar{\alpha}_1 \langle x, A^* y_1\rangle_X + \bar{\alpha}_2 \langle x, A^* y_2\rangle_X \\ &= \langle x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2\rangle_X.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2)\rangle_X = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

En particulier, cela est vrai pour $x = A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2)$ et donc

$$A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2.$$

Ainsi A^* est linéaire.

Il reste à montrer que A^* est bornée. Pour f comme définie dans (7.1), nous avons

$$f(x) = \langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^* y\rangle_X \quad \forall\, x \in X,$$

et donc

$$|f(x)| = |\langle x, A^* y\rangle_X| \leq \|x\|\, \|A^* y\| = \|A^* y\|\, \|x\| \quad \forall\, x \in X,$$

et donc f est bornée et $\|f\| \leq \|A^* y\|$. Puisque

$$|f(A^* y)| = |\langle A^* y, A^* y\rangle| = \|A^* y\|\, \|A^* y\|,$$

nous avons aussi que $\|f\| \geq \|A^* y\|$. Ainsi $\|f\| = \|A^* y\|$.

Nous avons aussi, pour tout $x \in X$,

$$|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle_Y| \leq \|Ax\|\, \|y\| \leq \|A\|\, \|x\|\, \|y\| = (\|A\|\, \|y\|)\|x\|,$$

et donc

$$\|f\| \leq \|A\|\, \|y\|.$$

Par conséquent, pour $y \in Y$, nous avons

$$\|A^* y\| = \|f\| \leq \|A\|\, \|y\|.$$

Ainsi A^* est bornée et $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Définition 7.2.8 (Adjoint)**.** Si X et Y sont des espaces de Hilbert, *l'adjoint* de $A \in B(X, Y)$ est la fonction $A^* \in B(Y, X)$ déterminée par

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^* y\rangle_X, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Si $Y = X$ et $A^* = A$, nous disons que A est *autoadjoint*.

Théorème 7.2.9. *Si X, Y sont des espaces de Hilbert et $A \in B(X, Y)$, alors $A^{**} = A$ et $\|A^*\| = \|A\|$.*

Démonstration. Selon la définition de l'adjoint, nous avons

$$\langle y, Ax\rangle_Y = \overline{\langle Ax, y\rangle_Y} = \overline{\langle x, A^*y\rangle_X} = \langle A^*y, x\rangle_X = \langle y, A^{**}x\rangle_Y, \quad \forall\, x \in X,\ y \in Y.$$

Ainsi $Ax = A^{**}x$ pour tout $x \in X$, donc $A^{**} = A$. Nous savons que $\|A^*\| \le \|A\|$, donc nous avons aussi que

$$\|A\| = \|A^{**}\| \le \|A^*\|.$$

Ainsi $\|A^*\| = \|A\|$. □

Les opérateurs autoadjoints sont très importants. Par exemple, en mécanique quantique, des quantités mesurables telles que la position, l'énergie, et la quantité de mouvement sont en fait des opérateurs sur un espace approprié de Hilbert—l'espace des fonctions d'onde représentant l'état d'un système. En effet, telles quantités observables correspondent à des opérateurs autoadjoints. Comme ces quantités sont des nombres réels, le résultat suivant n'est pas surprenant.

Lemme 7.2.10. *Si A est un opérateur autoadjoint sur en espace de Hilbert, alors ses valeurs propres sont des nombres réels.*

Démonstration. Supposons que λ est une valeur propre de A. Alors il existe un vecteur non zéro x tel que $Ax = \lambda x$. Puis

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Puisque $x \neq \mathbf{0}$, nous avons $\langle x, x\rangle \neq 0$, et donc $\lambda = \bar{\lambda}$. Ainsi $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Nous terminons cette section (et le cours) avec quelques résultats et applications intéressants.

Définition 7.2.11 (Ensemble complet dans un espace préhilbertien)**.** Supposons que T est un ensemble orthonormal dans un espace préhilbertien X. Si $\operatorname{Vect} T$ (le sous-espace vectoriel engendré par T) est dense dans X, alors nous disons que l'ensemble T est *complet.*

Proposition 7.2.12. *Un ensemble orthonormal complet et fini dans un espace préhilbertien est une base pour l'espace.*

Les ensembles orthonormals finis et complets ne sont pas très intéressants. Ce qui est plus intéressant sont des ensembles orthonormals complets et infinis. Ils sont un peu comme des bases, sauf que nous avons besoin de sommes infinies (c.-à-d. les séries) de multiples des éléments.

Proposition 7.2.13. *Un espace préhilbertien est séparable si et seulement s'il contient un ensemble orthonormal complet qui est dénombrable.*

Théorème 7.2.14 (Théorème de série de Fourier généralisée)**.** *Supposons que X est un espace préhilbertien qui est séparable, et que $T = \{x_1, x_2, \dots,\}$ est un ensemble orthonormal complet dans X. Alors les énoncés suivants sont vrais.*

(a) Pour tout $u \in X$, nous avons

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, x_k\rangle x_k.$$

(b) *Pour tous $u, v \in X$, nous avons*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, x_k\rangle \langle x_k, v\rangle.$$

(c) *Pour tout $u \in X$, nous avons*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, x_k\rangle|^2.$$

La série dans (a) est appelée la *série de Fourier* pour u, et les nombres $\langle u, x_n\rangle$ sont appelés les *coefficients de Fourier* de u.

Exemple 7.2.15. La théorie plus familière des séries de Fourier est un cas particulier du théorème ci-dessus. Nous prenons $X = C_2[-\pi, \pi]$ and $T = \left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\sin t, \frac{1}{\pi}\cos t, \frac{1}{\pi}\sin 2t, \frac{1}{\pi}\cos 2t, \dots\right\}$. Alors toute $f \in C_2[-\pi, \pi]$ peut être écrite sous sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Cela a des applications à la musique—nous écrivons une fonction arbitraire (ou “onde acoustique”) en termes de fonctions sinus et cosinus (“tons purs”).

Définition 7.2.16 (Isomorphisme des espaces préhilbertiens)**.** Un espace préhilbertien X est *isomorphe* à un autre espace préhilbertien Y s'il existe une fonction linéaire bijective $A\colon X \to Y$ telle que

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, Ax_2\rangle \quad \forall\ x_1, x_2 \in X.$$

Théorème 7.2.17. *Tout espace de Hilbert séparable et de dimension infinie est isomorphe à ℓ^2.*

Exercices.

7.2.1. Démontrez que f définie par (7.1) est linéaire.

7.2.2 ([Coh03, Ex. 9.8(1)]). (a) Considérez ℓ^2 comme espace normé et, pour $k \in \mathbb{N}_+$, soit e_k le point dans ℓ^2 dont toutes les composantes sont 0 sauf que la k-ième, qui égale 1. Montrez que, si $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in \ell^2$, alors $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

(b) Donnez un exemple dans lequel cette série pour x n'est pas absolument convergente.

7.2.3. Supposons que X, Y, et Z sont des espaces préhilbertiens, et que $A \colon X \to Y$ et $B \colon Y \to Z$ sont des isomorphismes. Montrez que la composition $BA \colon X \to Z$ est un isomorphisme (des espaces préhilbertiens)

7.2.4. Démontrez que tout espace préhilbertien complexe de dimension n est isomorphe (comme espace préhilbertien) à $\mathbb{C}^n$.

Index

$\cap\mathcal{C}$, 59
$\cup\mathcal{C}$, 59

adhérence, 46
  monotone, 51
adjoint, 117, 118
algorithme
  de Gram–Schmidt, 115
approximation, 91
  de Weierstrass, 93
  minimax, 42
argument de la diagonale de Cantor, 56
autoadjoint, 118

Baire, espace de, 9, 36, 54, 56, 60
Bernstein
  polynôme, 95
binôme
  formule, 94
Bolzano–Weierstrass, propriéte de, 61
borné, 23
  opérateur, 99
  uniformément, 36
boule fermé, 51
boule ouverte, 46

$C[a, b]$, 7
  complet, 19
  norme uniforme, 79
$C_1[a, b]$, 8
  n'est pas complet, 20
$C_2[a, b]$
  produit scalaire, 114
$C_p[a, b]$, 9
  norme, 79
$\mathbb{C}$
  complet, 17
$\mathbb{C}^n$
  complet, 19
  espace préhilbertien, 112
c_0, 78
Cauchy–Schwarz
  inégalité, 3, 113
  inégalité (integrale), 11
chemin, 68
closed, 48
coefficient de Fourier, 120
compact, 33, 34, 41, 60, 62, 81
  dénombrablement, 61
  séquentiellement, 33, 62
complété, 71
complet, 16, 33, 71, 81
  ensemble dans un espace préhilbertien, 119
condition de Lipschitz, 29
connexe, 57
  par arcs, 68
constante
  de contraction, 26
  de Lipschitz, 29
continue, 25, 65
  séquentiellement, 25
  uniformément, 39, 94
contraction, 26
converge absolument, 82
convergence, 1, 12
  absolue, 82
  d'une série, 82
  dans un espace normé, 81
  ponctuelle, 15
  simple, 15
  uniforme, 15
convergente, 81
convexe, 92
courbe sinus fermée du topologue, 69

dénombrablement compact, 61

dense, 53
diamètre, 23
disjoint, 57
distribution de Dirac, 100, 106
dual
 espace, 106

ϵ-filet, 62
ensemble
 borné, 23
 dérivé, 49
 fermé, 44
 orthogonal, 115
 orthonormal, 115
 ouvert, 44
équicontinue, 36
 uniformément, 36
espace
 T_1, 65
 de Baire, 9, 36, 54, 56, 60
 de Banach, 81
 de Hausdorff, 60
 de Hilbert, 116
 dual, 106
 euclidien, 3, 5
 normé, 76
  complet, 81
  convergence, 81
  de dimension finie, 85
 préhilbertien, 111
 séparé, 60
 topoogique, 44
 vectoriel normé, 76
espace métrique, 1
 fonction entre, 24

fermé, 22, 34, 44
fonction
 continue, 25, 65
 contractante, 26
 distance, 2
 entre des espaces métriques, 24
 lipschitzienne, 67
fonctionnelle, 105
Fourier
 coefficient, 120
 série, 119
frontière, 52

Hahn–Banach, théorème, 107
Hausdorff, 60
homogène
 metrique, 79

identité de polarisation, 116
image, 66
 réciproque, 66
inégalité
 de Cauchy–Schwarz, 3, 113
 de Cauchy–Schwarz (intégrale), 11
 de Minkowski, 78
 Hölder, 4
 triangulaire, 2, 76
intérieur, 46
invariante sous les translations, 79
isométrie, 71
isométrique, 71
isomorphisme
 des espace préhilbertiens, 120
 isométrique, 71

ℓ^1, 7
 complet, 21
ℓ^2, 5
 complet, 18
 produit scalaire, 112
ℓ^∞, 7
 complet, 21
 norme, 78
ℓ^p, 7
 complet, 19
 norme, 78
limite, 12
 ponctuelle, 15
 simple, 15
 uniforme, 15
lipschitzienne, 67

maximum, 41
métrique, 2
 ℓ^p sur $\mathbb{C}^n$, 5

0-1, 3
associée à une norme, 77
discrète, 3
euclidenne, 3
euclidienne sur $\mathbb{C}^n$, 5
homogène, 79
induite, 2
invariante sous les translations, 79
ℓ^∞, 19
ℓ^∞, 4
ℓ^p, 4, 19
naturelle, 2
standard, 2
sup, 8
uniforme, 8
usuelle, 2
métrisable, 49
minimum, 41
moindres carrés, 93

norme, 76
ℓ^∞, 78
ℓ^p, 78
d'opérateur, 99
d'une métrique, 77
équivalente, 88
espace préhilbertien, 113
euclidienne, 77
sur $C_p[a, b]$, 79
uniforme sur $C[a, b]$, 79

opérateur
borné, 98, 99
norme, 99
orthogonal, 115
orthonormal, 115
ouvert
dans un espace métrique, 46

$\mathcal{P}_n([a, b])$, 91
plongement isométrique, 71
point
d'accumulation, 49
d'adhérence, 49
fixe, 26
frontière, 52
intérieur, 52
isolé, 50
polynôme
de Bernstein, 95
produit scalaire, 111
propriété
de Bolzano–Weierstrass, 61
de l'intersection de Cantor, 73
Pythogore
théorème, 116

$\mathbb{R}_{\geq 0}$, 1
recouvrement ouvert, 60
fini, 60
règle du parallélogramme, 114
$\mathbb{R}^n$, 3
complet, 19
espace préhilbertien, 112

sépare les points, 107
semi-norme, 80
semimétrique, 12
séparable, 54
$C[a, b]$, 96
séquentiellement
compact, 33, 62
fermé, 22
série, 82
de Fourier, 119
singleton, 47
somme
d'une série, 82
partielle, 82
sous-ensemble
borné, 34
sous-espace
fermé, 22
métrique, 2, 22
normé, 107
sous-recouvrement, 60
strictement convexe, 92
suite, 12
bornée, 7
de Cauchy, 16, 81

T_1, espace, 65

théorème
  d'approximation de Weierstrass, 95
  d'Arzelà–Ascoli, 37
  de Bolzano–Weierstrass, 35
  de densité, 53
  de Hahn–Banach, 105, 107
  de série de Fourier généralisée, 119
  des valeurs intermédiares, 70
  du point fixe, 26, 27
  du Pythagore, 116
théorie
  de l'approximation, 91
topologie, 44
  associée à la metrique, 46
  de Hausdorff, 60
  discrète, 44
  grossière, 45
  moins fine, 45
  plus fine, 45
  triviale, 45

uniformément
  bornée, 36
  continue, 39, 94
  équicontinue, 36

voisinage, 49

Weierstrass
  approximation, 93
  théorème d'approximation, 95

$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_+}$, 9, 36, 54, 56, 60

Bibliographie

[Coh03] Graeme L. Cohen. *A course in modern analysis and its applications*, volume 17 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511755125.