1

(a) Faux. Exemple : $A = \{0,1\}$, $B = \{0\}$.
Alors, la paire ordonnée $(1,0)$ appartient à $A \times B$, mais pas à $B \times A$.

(b) Vrai. $\forall x \in A \ \forall y, z \in B$
$$\big((x,y) \in \phi \land (x,z) \in \phi\big) \longrightarrow \ldots$$
est toujours vrai, quel que soit la conclusion !

(c) Faux. Exemple le plus simple : $A = \{0,1\}$, $R = \{(0,1)\} \subseteq A \times A$.
Ici, $R^{-1} = \{(1,0)\}$, et $R^{-1} \cap R = \phi$, ~~[illegible]~~
$R^{-1} \not\subseteq R$.

(d) Faux : f n'est pas surjective, par exemple, $2 \notin f(\mathbb{Z})$.

(e) Vrai. L'inverse de f est la fonction
$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}.$$

(f) Vrai, puisque les deux ensembles contiennent le même nombre d'éléments, 3. ~~[illegible]~~ Si f envoie 1, 2, 3 sur les distincts éléments de $\{p,q,r\}$, elle est forcément surjective.

(g) Vrai.

(h) ~~[illegible]~~ Vrai. Comme vous connaissez depuis le devoir 2, chaque fonction ~~[illegible]~~ idempotente, f, satisfait $f(x) = x$ pour chaque x dans l'image de f. Puisque f est surjective, tous les x appartiennent à son image, d'où f est une fonction identité.

(2) (2 points pour chaque sous-problème).

(a) Par exemple, la fonction de 1,(d) : $f(n) = n^3$.

(b) $R = \{0,1\} \times \{0,1\}$. Alors, $(0,0) \in R$ et $(0,1) \in R$.

(c) Il suffit de choisir une relation symétrique, c.à.d. satisfaisant $R^{-1} = R$.

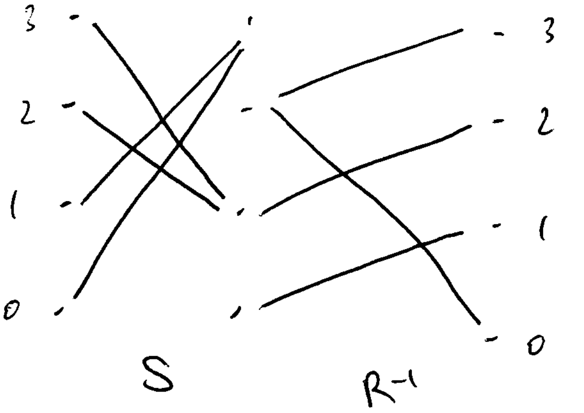
Par exemple, $R = \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$.

Ou bien le choix le plus économique :

$$R = \{(a,b), (b,a)\}.$$

(3) $R^{-1} = \{(2,0), (1,2), (0,1), (2,3)\}$

$R^{-1} \circ S = \{(2,2), (3,2)\}$, $(R^{-1} \circ S)^{-1} = \{(2,2), (2,3)\}$. <u>3 points</u> pour une solution correcte.



Dans le cas d'ordre confus (c.à.d., $R^{-1} \circ S$ dans mon sens...), vous aurez :

$$R^{-1} \circ_{vp} S = \{(0,3), (2,1)\},$$

et son inverse :

$$\{(3,0), (1,2)\}.$$

Cela vous amènera 2 points sur 3.

(4)

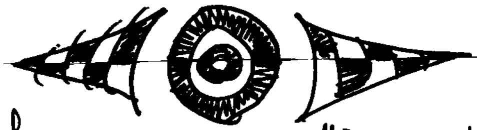
(a) Oui, c'est vrai.

Soit $c \in C$ quelconque. Puisque g est surjective, il existe $b \in B$ avec $g(b) = c$. Puisque f est surjective, il existe $a \in A$ avec $f(a) = b$. On a : $g(f(a)) = g(b) = c$. On en conclut : gf est surjective.

(b) Pas forcément. Par exemple : posons $A = \{0,1\} = B$, $C = \{0\}$, et définissons f et g comme deux fonctions constantes, qui prennent la valeur 0 toujours. Alors $gf : A \to C$ est surjective, mais $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ ne l'est pas, $f(0) = f(1) = 0$.

(c) Cet énoncé est vrai.

Sous l'hypothèse que gf est surjective, soit $c \in C$ quelconque. Puisque gf est surjective, il existe $a \in A$ avec la propriété $(gf)(a) = c$. En d'autres mots, on a $g(f(a)) = c$, où $f(a) \in B$. On en conclut : g est surjective.



2 points pour chaque sous-problème, et
1 point de plus pour la capacité d'écrire générale.

⑤ (a) Pour être consistant avec (b),

soient $R \subseteq B \times C$ et $S \subseteq A \times B$ deux relations quelconques. Leur composition, selon Frege, est une relation notée $R \circ S \subseteq A \times C$, définie comme suit :

$$\forall a \in A \ \forall c \in C, \quad a(R \circ S)c \iff \exists b \in B, \quad (aSb) \wedge (bRc).$$

(b) Soient R et S comme dans (a).

Alors, $(R \circ S)^{-1}$ et $(S^{-1} \circ R^{-1})$ sont toutes les deux des relations entre C et A. Il suffit de montrer que, quels que soient $a \in A$ et $c \in C$, on a :

$$(c,a) \in (R \circ S)^{-1} \iff (c,a) \in S^{-1} \circ R^{-1}.$$

On a donc, avec ce but :

$$c\,(R \circ S)^{-1} a \iff \text{(déf. de la relation inverse)}$$

$$a(R \circ S)c \iff \text{(déf. de la composée)}$$

$$\exists b \in B \quad aSb \wedge bRc \iff \text{(déf. de la relation inverse)}$$

$$\exists b \in B \quad bS^{-1}a \wedge cR^{-1}b \iff \text{(déf. de la composée)}$$

$$c\,(S^{-1} \circ R^{-1})\,a.$$

La preuve est terminée. $\square$

(c) Posons $A = B = \{0,1\}$, $R = \{(1,1)\}$, $S = \{(0,1)\}$.

Maintenant on a : $R \circ S = \{(0,1)\}$, tandis que

$$S \circ R = \emptyset.$$

<u>Correction</u> : 2 points pour chaque sous-problème.

⑥

$$B \sqcup C = B \times \{0\} \cup C \times \{1\}, \quad \text{d'où}$$

$$A \sqcup (B \sqcup C) = A \times \{0\} \cup \left(B \times \{0\} \cup C \times \{1\} \right) \times \{1\}$$

$$= A \times \{0\} \cup B \times \{0\} \times \{1\} \cup C \times \{1\} \times \{1\}$$

$$= A \times \{0\} \cup B \times \{(0,0)\} \cup C \times \{(1,1)\}.$$

Au même temps,

$$A \sqcup B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, \quad \text{d'où}$$

$$(A \sqcup B) \sqcup C = \left(A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \right) \times \{0\} \cup C \times \{1\}$$

$$= A \times \{0\} \times \{0\} \cup B \times \{1\} \times \{0\} \cup C \times \{1\}$$

$$= A \times \{(0,0)\} \cup B \times \{(1,1)\} \cup C \times \{1\}.$$

La bijection évidente entre deux ensembles envoie chaque élément

$$(a, 0) \longmapsto (a, (0,0)),$$
$$(b, (0,0)) \longmapsto (b, (1,1)),$$
$$(c, (1,1)) \longmapsto (c, 1),$$

quels que soient $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Seulement l'étiquette est remplacée.

Je n'exige pas d'une preuve complète que c'est une bijection; disons que cela est plus ou moins "évident".

(7) <u>Bonus.</u>

La relation R^* nous dit que deux ~~ens~~ sous-ensembles, $U \subseteq B$ et ~~…~~ $V \subseteq A$, sont lié entre eux si et seulement si V consiste de tous les éléments de A liés à un élément quelconque de U par R.

Cela veut dire que, étant donné un $U \subseteq B$, il existe un et un seul sous-ensemble $V \subseteq A$ lié à U par R^*, notamment,

$$V = \{ a \in A : \exists b \in U, \ a R b \}.$$

Par conséquent, la relation R^* est fonctionnelle, elle envoie chaque $U \subseteq B$ dans un V comme ci-dessus.

(3 points — comme toujours pour un problème bonus).